TẠP CHÍ KHOA HỌC
Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Số 16 (6/2019) tr.56 - 64

NGHIỆM HẦU TUẦN HOÀN CỦA PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC VỚI TRỄ HỮU HẠN

Lê Văn Kiên[1], Nguyễn Hữu Trí[2]

[1]Trường Đại học Tây Bắc, [2]Trường THPT Trung Văn, Hà Nội

Tóm tắt: *Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm hầu tuần hoàn đối với phương trình parabolic với trễ hữu hạn. Sử dụng kết quả đã có đối với các phương trình vi phân hàm trong không gian Banach vô hạn chiều, chúng tôi đưa ra được điều kiện tồn tại duy nhất nghiệm hầu tuần hoàn đối với các lớp phương trình trên.*

Từ khóa: *Phương trình parabolic, Nghiệm hầu tuần hoàn, Phổ của hàm số.*

1. Mở đầu

Cho Ω là miền với biên $\partial\Omega$ trơn, xét bài toán

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \Delta u(x,t) + Fu_t(x) + f(x,t), x \in \Omega, t \geq 0, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, t \geq 0, \\ u(x,s) = \varphi(s)(x), x \in \Omega, s \in [-r,0] \end{cases} \quad (1.1)$$

ở đó Δ là toán tử Laplace, $r > 0$ là số thực dương cho trước, $Fu_t = \int_{-r}^{0} u(.,t+s)d\eta(s), u_t \in C([-r,0],\mathbb{X}), u_t(s) := u(t+s), \eta : [-r,0] \to L(\mathbb{X}), \mathbb{X} = L_2(\Omega),$

là hàm có biến phân bị chặn, $\varphi \in C([-r,0],\mathbb{X}),\ f(t) = f(.,t) \in X$ là hàm hầu tuần hoàn theo biến t. Bằng cách xét $u(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{X} = L_2(\Omega), u(t)(x) = u(t,x)$, và $A = \Delta : \mathbb{X} \to \mathbb{X}$ với $D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, ta đưa bài toán trên về dạng tổng quát

$$\begin{cases} \dfrac{du(t)}{dt} = Au(t) + Fu_t + f(t),\ u(t) \in \mathbb{X}, t > 0, \\ u(s) = \varphi(s), s \in [-r,0]. \end{cases} \quad (1.2)$$

Hàm liên tục bị chặn đều $u : [-r,+\infty) \to X$ được gọi là nghiệm nhẹ (nghiệm tích phân) của bài toán (1.2) nếu $u_0 = \varphi$ và

Ngày nhận bài: 14/04/2019. Ngày nhận đăng: 24/05/2019.
Liên lạc: Lê Văn Kiên, e-mail: mr.kiencan@gmail.com

$$u(t) = T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-s)[Fu_s + f(s)]ds, t > 0,$$

với $\{T(t)\}_{t\geq 0}$ là nửa nhóm liên tục mạnh sinh bởi A.

Như vậy việc nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm hầu tuần hoàn của Bài toán (1.1) tương ứng với sự tồn tại duy nhất nghiệm hầu tuần hoàn của bài toán (1.2). Bài toán (1.2) đã được nghiên cứu bởi V.T. Luong và N.V. Minh gần đây trong bài báo [2], trong bài báo này chúng tôi sử dụng kết quả trong bài báo [2] để nghiên cứu sự tồn tại duy nhất nghiệm hầu tuần hoàn của Bài toán (1.1). Hơn thế nữa, chúng tôi đưa ra những ví dụ cụ thể thể minh họa cho kết quả thu được.

Trước tiên chúng ta đi tổng hợp một số công cụ và kết quả ban đầu có liên quan được trình bày trong các bài báo [2, 3, 5].

Phương trình thuần nhất liên kết với (1.2) sinh ra một nửa nhóm liên tục mạnh $V(t)_{t\geq 0}$ trên không gian $C = C([-r, 0], \mathbb{X})$. Thật vậy,

$$V(t): C \to C, \varphi \mapsto u_t,$$

với u là nghiệm duy nhất của bài toán

$$\begin{aligned} u(t) &= T(t)\varphi(0) + \int_0^t T(t-\xi)Fu_\xi d\xi, t \geq 0, \\ u_0 &= \varphi. \end{aligned}$$

Tiếp theo chúng ta đi xét toán tử sinh của $V(t)_{t\geq 0}$. Ta định nghĩa toán tử

$$A_v : C \to C, \varphi \mapsto A_v\varphi$$

như sau

$$(A_v\varphi)(\theta) = \frac{d\varphi}{d\theta}(\theta), -r \leq \theta \leq 0,$$

với

$$D(A_v) = \{\varphi \in C : \frac{d\varphi}{d\theta}(\theta) \in C, \varphi(0) \in D(A), \frac{d\varphi^-}{d\theta}(0) = A\varphi(0) + F\varphi\}.$$

Bổ đề 1.1. *Với A_v được định nghĩa ở trên, miền xác định $D(A_v)$ trù mật trong C, là toán tử sinh của nửa nhóm liên tục mạnh $V(t)_{t\geq 0}$.*

Bổ đề 1.2. *Nếu A sinh ra nửa nhóm liên tục mạnh compact $T(t)_{t\geq 0}$ trên X, thì $V(t)_{t\geq 0}$ là nửa nhóm liên tục mạnh compact trên C.*

Ta giả sử A sinh ra nửa nhóm liên tục mạnh compact $T(t)_{t\geq 0}$ trên X. Khi đó ta có các kết quả sau.

Mệnh đề 1.3. *Với $t > r$, thì $\sigma(V(t))$ là tập đếm được và compact với điểm tụ duy nhất là 0, và nếu $\mu \in \sigma(V(t)) \setminus \{0\}$ thì $\mu \in P\sigma(V(t))$.*

Mệnh đề 1.4. *Với $t > 0$, thì $P\sigma(V(t)) = e^{tP\sigma(A_v)} \setminus \{0\}$. Đặt biệt, nếu $\mu = \mu(t) \in P\sigma(V(t))$ với $t > r$ và $\mu \neq 0$, khi đó tồn tại $\lambda \in P\sigma(A_v)$ sao cho $\mu = e^{t\lambda}$.*

Với mỗi λ ta định nghĩa toán tử bởi

$$\Delta(\lambda)x = Ax - \lambda x + \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta)x, x \in D(A).$$

Khi đó nếu $\lambda \in P\sigma(A_v)$ thì tồn tại một hàm $0 \neq \varphi \in D(A_v), \dfrac{d\varphi}{d\theta} - \lambda\varphi = 0$. Điều này có nghĩa là

$$\varphi(\theta) = e^{\lambda\theta}\varphi(0), \varphi(0) \neq 0, d\varphi^{-}(0)/d\theta = A\varphi(0) + \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta)\varphi(0).$$

Suy ra, $\Delta(\lambda)\varphi(0) = 0$.

Ngược lại, nếu tồn tại $x \neq 0 \in D(A)$ sao cho

$$\Delta(\lambda)x = Ax - \lambda x + \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta)x = 0.$$

Khi đó đặt $\varphi(\theta) = e^{\lambda\theta}x, \theta \in [-r, 0]$, thì $\dfrac{d\varphi}{d\theta} = \lambda\varphi, \theta \in [-r, 0]$ và

$$\varphi(0) = x \neq 0, d\varphi^{-}(0)/d\theta = A\varphi(0) + \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta)\varphi(0).$$

Điều đó có nghĩa là $\varphi \in D(A_v)$\$,\$ $A_v\varphi = \lambda\varphi$, hay $\lambda \in P\sigma(A_v)$.

Như vậy, $\lambda \in P\sigma(A_v)$ khi và chỉ khi tồn tại $x \neq 0 \in D(A)$ sao cho

$$\Delta(\lambda)x = Ax - \lambda x + \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta)x = 0. \quad (1.3)$$

2. Kết quả chính

Trong mục này chúng ta sử dụng các kí hiệu sau đây:

(i) $L^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{X}), BC(\mathbb{R}, X), BUC(\mathbb{R}, X), AP(\mathbb{X})$ tương ứng là các không gian của các hàm nhận giá trị trong $\mathbb{X}$ bị chặn hầu khắp nơi, liên tục bị chặn, bị chặn liên tục đều trên $\mathbb{R}$ và không gian các hàm hầu tuần hoàn (theo nghĩa của Bohr). Ta có mối quan hệ

$$AP(\mathbb{X}) \subset BUC(\mathbb{R}, X) \subset BC(\mathbb{R}, X) \subset L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{X}).$$

(ii) Γ là đường tròn đơn vị trong mặt phẳng phức $\mathbb{C}$.

(iii) Toán tử dịch chuyển $S(\tau)$ được xác định bởi $S(\tau)g(t) = g(t+\tau)$ với mọi $t \in \mathbb{R}, g \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Đặc biệt ta kí hiệu $S := S(1)$.

2.1. Phổ tròn của hàm số

Trong mục này chúng ta đi xây dựng một biến đổi của hàm $g \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ trên đường thẳng thực, cái dẫn đến một khái niệm phổ của hàm số.

Phổ này trùng với tập $\overline{e^{isp(g)}}$ nếu thêm điều kiện g là hàm liên tục đều, ở đây $sp(g)$ kí hiệu là phổ Beurling của g. Các kết quả này được đề cập dưới đây về phổ tròn của hàm số được trình bày trong [3].

Cho $g \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$. Xét hàm phức $Sg(\lambda)$ với $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ được xác định như sau

$$Sg(\lambda) := R(\lambda, S)g, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma. \tag{1.4}$$

Vì S là toán tử dịch chuyển, nên biến đổi này là hàm giải tích theo $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$.

Định nghĩa 2.1. *Phổ tròn của $g \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ được định nghĩa là tập tất cả $\xi_0 \in \Gamma$ sao cho $Sg(\lambda)$ không có một thác triển giải tích nào trong bất kì lân cận của ξ_0 trên mặt phẳng phức. Phổ tròn của g được kí hiệu bởi $\sigma(g)$ và để ngắn gọi ta gọi là phổ của g. Chúng ta kí hiệu $\rho(g)$ là tập $\Gamma \setminus \sigma(g)$.*

Mệnh đề 2.2. *Lấy $\{g_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ sao cho $g_n \to g \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, và lấy Λ là tập con đóng của đường tròn đơn vị. Khi đó ta có các khẳng định sau đây:*

(i) $\sigma(g)$ là tập đóng.

(ii) Nếu $\sigma(g_n) \subset \Lambda$ với mọi $n \in \mathbb{N}$, thì $\sigma(g) \subset \Lambda$.

(iii) $\sigma(Ag) \subset \sigma(g)$ với mọi toán tử tuyến tính bị chặn A trên $BUC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ cái mà giao hoán với S.

(iv) Nếu $\sigma(g) = \varnothing$, thì $g = 0$.

Tiếp theo ta nhắc lại khái niệm phổ Beurling của một hàm. Kí hiệu F là biến đổi Fourier, có nghĩa là

$$(Ff)(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ist} f(t)dt, s \in \mathbb{R}, f \in L^1(\mathbb{R}).$$

Khi đó *Phổ Beurling* của hàm $u \in BUC(\mathbb{R}, \mathbb{X})$ được định nghĩa là tập sau đây

$$sp(u) := \{\xi \in \mathbb{R} : \forall \epsilon > 0 \ \ \exists f \in L^1(\mathbb{R}), suppFf \subset (\xi - \epsilon, \xi + \epsilon), \ f * u \neq 0\}$$

ở đó $f * u(s) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(s-t)u(t)dt.$

Định lí 2.3. *Với các kí hiệu ở trên,* $sp(u)$ *trùng với tập gồm các* $\xi \in \mathbb{R}$ *sao cho biến đổi Fourier-Carleman của* u *, xác định bởi*

$$\hat{u} = \begin{cases} \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} u(t)dt, & Re\lambda > 0, \\ -\int_{-\infty}^{0} e^{-\lambda t} u(t)dt, & Re\lambda < 0, \end{cases}$$

không thể thác triển giải tích trong mọi lân cận của $i\xi$ *.*

Định lí được chứng minh trong [4, Proposition 0.5, p.22].

Như một hệ quả của định lí ánh xạ phổ yếu ta có mối liên hệ giữa phổ tròn của hàm số và phổ Beurling như sau.

Mệnh đề 2.4. [3,Corollary 3.8] *Lấy* $g \in BUC(\mathbb{R}, \mathrm{X})$ *. Khi đó*

$$\sigma(g) = \overline{e^{isp(g)}}.$$

Ví dụ 2.5. Hàm $g \in L^{\infty}(\mathbb{R}, \mathrm{X})$, là một hàm tuần hoàn với chu kì τ trên $\mathbb{R}$.

Khi đó dễ dàng ta tính được biến đổi Fourier-Carleman

$$\hat{f}(\lambda) = (1 - e^{-\lambda\tau})^{-1} \int_0^{\tau} e^{-\lambda t} f(t)dt, Re\lambda \neq 0,$$

có nghĩa là $\hat{f}(\lambda)$ có thể mở rộng một hàm phân hình với các cực điểm đơn $\lambda_n = 2\pi in/\tau, n \in \mathbb{Z}$.

Thặng dư tại các cực điểm đơn λ_n cho bởi

$$Res[\hat{f}; \lambda_n] = f_n = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau} e^{-2\pi int/\tau} f(t)dt, n \in \mathbb{Z},$$

là hệ số trong khai triển Fourier của f .

Do đó

$$sp(f) = \{2\pi n/\tau : n \in \mathbb{Z}, \ f_n \neq 0\}.$$

Ta nhắc lại định nghĩa về hàm hầu tuần hoàn (theo nghĩa của Bohr), một hàm $f \in BC(\mathbb{R}, X)$ được gọi là hầu tuần hoàn theo nghĩa của Bohr nếu mỗi $\epsilon > 0$ tồn tại một $T > 0$ sao cho mọi khoảng có độ dài T của $\mathbb{R}$ chứa ít nhất một điểm τ để

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} | f(t+\tau) - f(t) | \leq \epsilon.$$

Nếu f là hàm hầu tuần hoàn, thì (Định lí xấp xỉ [1, Chap. 2] nó có thể xấp xỉ đều trên $\mathbb{R}$ bởi một dãy các đa thức lượng giác, cụ thể là,

một dãy các hàm của $t \in \mathbb{R}$ có dạng

$$P_n(t) := \sum_{k=1}^{N(n)} a_{n,k} e^{i\lambda_{n,k} t}, \quad n = 1, 2, \ldots; \lambda_{n,k} \in \mathbb{R}, a_{n,k} \in \mathbb{X}, t \in \mathbb{R}. \tag{1.5}$$

hiển nhiên là mọi hàm được xấp xỉ bởi một dãy hàm các các đa thức lượng giác đều là hàm hầu tuần hoàn.

Ví dụ 2.6. Hàm $f(t) = \cos t + \cos \sqrt{2} t, t \in \mathbb{R}$ là một hàm thực hầu tuần hoàn trên $\mathbb{R}$.

Đặc biệt, số mũ của các đa thức lượng giác (các số thực $\lambda_{n,k}$ trong (1.5)) có thể chọn từ tập của các số thực λ (số mũ Fourier) sao cho các tích phân sau đây (hệ số Fourier)

$$a(\lambda, f) := \lim_{T \to \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(t) e^{-i\lambda t} dt$$

là khác 0. Như ta đã biết, những số thực λ như trên là đếm được $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, nó được kí hiệu $\sigma_b(f) = \{\lambda_1, \lambda_2, \ldots\}$ và được gọi là phổ Bohr của f .

Do đó với $f \in AP(\mathbb{X})$ xác định bởi chuỗi Fourier $\sum a_n e^{-i\lambda_n t}, a_n = a(\lambda_n, f)$.

Lấy hàm f trong Ví dụ 2.6 có $\sigma_b(f) = \{-1, -\sqrt{2}, 1, \sqrt{2}\}$.

Trong bài báo này chúng ta có mối liên hệ sau đây (xem [4,Proposition 0.7, p.26])

$$sp(f) = \overline{\sigma_b(f)}, \; f \in AP(\mathbb{X}).$$

Mệnh đề 2.7. *Lấy* $g \in AP(\mathbb{X})$. *Khi đó*

$$\sigma(g) = \overline{e^{i\sigma_b(g)}}.$$

2.2. Sự tồn tại duy nhất nghiệm hầu tuần hoàn

Một số kết quả liên qua đến sự tồn tại duy nhất nghiệm hầu tuần hoàn đối với phương trình (1.2) sau đây được chứng minh trong [2].

Kí hiệu $M = V(1)$ và $\sigma_\Gamma(M) = \sigma(M) \cap \{\lambda : |\lambda| = 1\}$.

Định lí 2.8. *Với các kí hiệu ở trên giả sử rằng*

$$\sigma_\Gamma(M) \cap \sigma(f) = \varnothing$$

được thỏa mãn. Khi đó có duy nhất nghiệm hầu tuần hoàn u *của phương trình (1.2) sao cho* $\sigma(u) \subset \sigma(f)$.

Ta biết rằng $\mu \in \sigma_{\Gamma}(M)$ khi và chỉ khi $\mu = e^{i\xi}, \xi \in \mathbb{R}$, ở đó $i\xi$ là nghiệm của phương trình (1.3). Phổ của Δ gồm các giá trị riêng $0 > \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, khi đó toán tử $A = \Delta$ sinh ra một C_0-nửa nhóm comppact co và giải tích $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ trong $L_2(\Omega), D(A) = H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \subset L_2(\Omega)$.

Định lí 2.9. *Giả sử phương trình*

$$\lambda_i = \lambda - \int_{-r}^{0} e^{\lambda\theta} d\eta(\theta),\ i = 1, 2, \dots, n, \dots$$

có các nghiệm ảo $\lambda_k = i\xi_k$ $k = 1, 2, \dots, n, \dots$ *. Khi đó nếu* $e^{i\xi_k} \notin \sigma(f)$ *thì phương trình (1.2) có duy nhất nghiệm hầu tuần hoàn* u *sao cho* $\sigma(u) \subset \sigma(f)$ *.*

Cụ thể ta xét hai ví dụ sau đây.

Ví dụ 2.10.

Xét trường hợp $\Omega = (0, l)$, và

$$\eta(\theta) = \begin{cases} aI, & \theta = 0, \\ 0, & -r < \theta < 0, \\ -bI, & \theta = -r, \end{cases}$$

ở đó I là toán tử đồng nhất trên $L_2(\Omega)$, và $a, b \in \mathbb{R}$.

Khi đó Bài toán (1.1) trở thành

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - au(x,t) - bu(x,t-r) + f(x,t), x \in (0,l), t \geq 0, \\ u(0,t) = u(l,t) = 0, t \geq 0 \\ u(x,s) = \varphi(s)(x), x \in \Omega, s \in [-r, 0]. \end{cases} \tag{1.6}$$

Khi đó các giá trị riêng của $\Delta = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}$ là $\lambda_k = -(\dfrac{k\pi}{l})^2, k \geq 1$.

Xét phương trình

$$\lambda + a + be^{-r\lambda} = -(\frac{k\pi}{l})^2, k \geq 1. \tag{1.7}$$

Nếu các phương trình (1.7) không có nghiệm ảo thì Bài toán (1.6) có duy nhất nghiệm hầu tuần hoàn u với $\sigma(u) \subset \sigma(f)$.

Ta xét trường hợp cụ thể hơn với $a = -1, b = \pi / 2, l = \pi, r = 1$, khi đó phương trình (1.7) chỉ có hai nghiệm ảo là $i\pi / 2, -i\pi / 2$. Do đó nếu $i, -i \notin \sigma(f)$ thì thì bài toán Bài toán (1.6) có duy nhất nghiệm hầu tuần hoàn u với $\sigma(u) \subset \sigma(f)$.

Ví dụ 2.11. Xét trường hợp $\Omega = B(0,1) = \{0 \le R < 1, 0 \le \theta \le 2\pi\} \subset \mathbb{R}^2$, và

$$\eta(\theta) = \begin{cases} -I, \ \theta = 0, \\ 0, \quad -1 < \theta < 0, \\ -\pi / 2I, \ \theta = -1, \end{cases}$$

ở đó I là toán tử đồng nhất trên $L_2(\Omega)$.

Trong trường hợp này các giá trị riêng của toán tử Δ là

$$\lambda_{n,m} = (\alpha_{n,m})^2, n, m \in \mathbb{N},$$

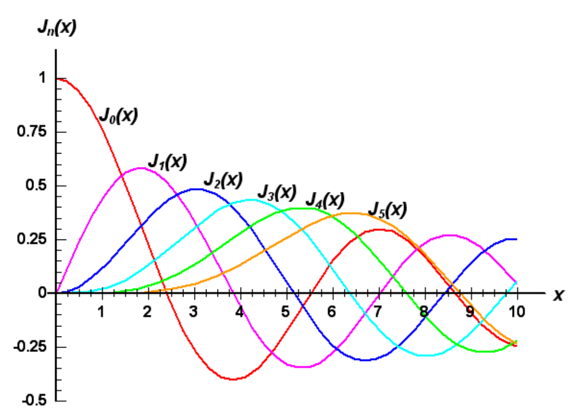
ở đó $\alpha_{n,m}$ là các không điểm của hàm Bessel loại một cấp n với

$$0 < \alpha_{n,1} < \alpha_{n,2} < \cdots < \alpha_{n,m} < \alpha_{n,m+1} < \cdots$$

Khi đó các phương trình

$$\lambda - 1 + \pi / 2e^{-\lambda} = (\alpha_{n,m})^2, n, m \in \mathbb{N},$$

không có nghiệm ảo, do vậy Bài toán (1.6) có duy nhất nghiệm hầu tuần hoàn u với $\sigma(u) \subset \sigma(f)$.



Nghiên cứu này được tài trợ bởi Bộ Giáo Dục và Đào tạo thuộc Đề tài KHCN cấp Bộ, Mã số: B2018-TTB-11.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] B. M. Levitan, V. V. Zhikov (1982), "Almost Periodic Functions and Differential Equations", Moscow Univ. Publ. House 1978. English translation by Cambridge University Press.

[2] Vu Trong Luong, Nguyen Van Minh (2019), Almost periodic solutions of periodic linear partial functional differential equations. Funkcialaj Ekvacioj. To appear.

[3] Nguyen Van Minh, G. N'Guerekata, S. Siegmund (2009), Circular spectrum and bounded solutions of periodic evolution equations, J. Differential Equations **246**, (2009), No 8, 3089-3108.

[4] J. Pruss, (1993), "Evolutionary Integral Equations and Applications", Birkhauser, Basel.

[5] C.C. Travis, G.F. Webb (1974), Existence and stability for partial functional differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. , **200** 394-418.

ALMOST PERIODIC SOLUTIONS FOR PARABOLIC WITH FINITE DELAY

Le Van Kien[1], Nguyen Huu Tri[2]

[1]Tay Bac University, [2]Trung Van High school, Hanoi

Abstract: *In this paper, we study the existence of almost periodic solutions for parabolic equations with finite delay. Basing on the existing results for functional differential equations in infinite-dimensional Banach space, we establish the unique existence of almost periodic solution for this class equtions.*

Key words: *Parabolic equations, almost periodic solutions, spectrum of functions*