TẠP CHÍ KHOA HỌC – ĐẠI HỌC TÂY BẮC
Khoa học Tự nhiên và Công nghệ

Nguyễn Minh Khoa và nnk (2021)
(24): 77 - 81

TÍCH CHẬP VỚI HÀM TRỌNG $\gamma(\mathrm{y}) = \cos\alpha y$ ĐỐI VỚI PHÉP BIẾN ĐỔI TÍCH PHÂN FOURIER COSINE

Nguyễn Minh Khoa*, Trần Văn Thắng
Đại học Điện Lực

Tóm tắt: *Trong bài báo này chúng tôi đã xây dựng và nghiên cứu tích chập với hàm trọng đối với phép biến đổi tích phân Fourier. Các tác giả đã phát biểu và chứng minh đẳng thức nhân tử hóa, một số tính chất và thiết lập quan hệ với tích chập đã biết. Sau cùng các tác giả áp dụng tích chập được đưa ra để giải phương trình tích phân kiểu Toeplitz-Hankel.*

Từ khóa: *Phương trình tích phân kiểu Toeplitz-Hankel; Tích chập; Tích chập với hàm trọng; Phép biến đổi tích phân Fourier; Phép biến đổi tích phân Fourier cosine.*

1. MỞ ĐẦU

Tích chập của phép biến đổi tích phân có nhiều ứng dụng lý thú trong các bài toán tính toán giá trị tích phân, tổng của chuỗi, giải phương trình và phép toán giải phương trình vi tích phân ([1, 3, 5, 6, 9, 11, 12, 14]). Khởi đầu, năm 1941 Churchill [11] đã đưa ra tích chập của hai hàm f và g đối với phép biến đổi tích phân Fourier F:

$$L\left(f \underset{L}{*} g\right)(y) = (Lf)(y).(Lg)(y), \forall y > 0. \quad (1)$$

thỏa mãn đẳng thức nhân tử hóa:

$$F\left(f \underset{F}{*} g\right)(y) = (Ff)(y).(Fg)(y), \forall y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

Sau đó, một số tích chập của các phép biến đổi tích phân khác như Mellin, Laplace, Fourier cosine, Hilbert được nghiên cứu [2]. Chẳng hạn, tích chập của hai hàm f và g đối với phép biến đổi tích phân:

$$\left(f \underset{L}{*} g\right)(x) = \int_0^x f(x-t)\, g(t)\, dt, \quad (3)$$

có đẳng thức nhân tử hóa:

$$L\left(f \underset{L}{*} g\right)(y) = (Lf)(y).(Lg)(y), \forall y > 0. \quad (4)$$

Tích chập với hàm trọng đối với phép biến đổi tích phân Mehler Fox được nghiên cứu bởi I. Ya. Vlenkin năm 1958 [13]. Sau đó, năm 1967, V. A. Kakichev [7] đưa ra phương pháp xây dựng tích chập với hàm trọng tổng quát hơn.

**Tel: 0904367812, Email: khoanm@epu.edu.vn*

Với ý tưởng đó các tích chập mới với hàm trọng của phép biến đổi tích phân Meijer, Hankel, Fourier sine, Sommerfeld được xây dựng. Cụ thể như tích chập với hàm trọng $\gamma(\mathrm{y}) = \sin y$ của hàm f, g đối với phép biến đổi tích phân Fourier sine được nghiên cứu trong [7, 10].

$$\left(f \overset{\gamma}{\underset{F_S}{*}} g\right)(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t)[g(x+1+t) \quad (5)$$
$$+g(|x+1-t|)\, sign(x+1-t)$$
$$+g(|x-1+t|)\, sign(x-1+t)$$
$$+g(|x-1-t|)\, sign(x-1-t)]dt,$$

với đẳng thức nhân tử hóa

$$F_S\left(f \overset{\gamma}{\underset{F_S}{*}} g\right)(y) = \sin y (F_s f)(y).(F_s g)(y),$$
$$\forall y > 0. \quad (6)$$

Tích chập của hai hàm f, g của phép biến đổi tích phân Fourier cosine cũng được đưa ra bởi Churchill năm 1941

$$\left(f \underset{F_c}{*} g\right)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y)[g(|\mathrm{x}-\mathrm{y}|) \quad (7)$$
$$+g(x+y)]dy$$

với đẳng thức nhân tử hóa

$$F_c\left(f \underset{F_c}{*} g\right)(y) = (F_c f)(y).(F_c g)(y), \quad (8)$$
$$\forall y > 0.$$

Trong bài báo này các tác giả xây dựng và nghiên cứu tích chập mới với hàm trọng $\gamma(\mathrm{y}) = \cos\alpha y$ đối với phép biến đổi tích phân Fourier cosine đồng thời giải một lớp phương trình tích phân kiểu Toeplitz-Hankel. Cho đến nay phương trình tích phân kiểu Toeplitz-Hankel vẫn là bài toán mở. Tích chập mới được xây dựng ở đây tổng quát hon tích chập cùng loại đã biết, do đó các ứng dụng sẽ được mở rộng hơn.

2. TÍCH CHẬP VỚI HÀM TRỌNG

Định nghĩa 2.1. Tích chập với hàm trọng $\gamma(\mathrm{y})=\cos\alpha y,(\alpha>0)$ của hai hàm f,g đối với phép biến đổi tích phân Fourier cosine được xác định bởi:

$$\left(f\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}g\right)(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty f(t)[g(x+\alpha+t) \quad (9)$$
$$+g(|x+\alpha-t|)+g(|x-\alpha+t|)$$
$$+g(|x-\alpha-t|)]dt,$$

Định lý 2.2. *Cho* f,g *là các hàm liên tục thuộc* $L(\mathbb{R}_+)$. *T*ích chập với hàm trọng $\gamma(\mathrm{y})=\cos\alpha y$ *của hai hàm* f,g đối với phép biến đổi tích phân Fourier cosine *thuộc* $L(\mathbb{R}_+)$ và thỏa mãn nhân tử hóa:

$$F_c\left(f\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}g\right)(y)=\cos\alpha y\left(F_cf\right)(y).\left(F_cg\right)(y),$$
$$\forall y>0. \quad (10)$$

Chứng minh. Ta có:

$$\int_0^{+\infty}|(f\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}g)(x)|\,dx=\frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}|f(t)|[$$
$$g(x+\alpha+t)+g(|x+\alpha-t|)$$
$$+g(|x-\alpha+t|)+g(|x-\alpha-t|)]dtdx$$
$$\le\frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty}|f(t)|\left[\int_0^{+\infty}|g(x+\alpha+t)|dx\right.$$
$$+\int_0^{+\infty}|g(|x+\alpha-t|)|dx+\int_0^{+\infty}|g(|x-\alpha+t|)|dx$$
$$\left.+\int_0^{+\infty}|g(|x-\alpha-t|)|dx\right]dt \quad (11)$$

Mặt khác

$$\int_0^{+\infty}|g(x+\alpha+t)|dx+\int_0^{+\infty}|g(|x-\alpha-t|)|dx=$$
$$\int_{t+\alpha}^{+\infty}|g(u)|du+\int_{-t-\alpha}^{+\infty}|g(u)|du$$
$$=\int_{t+\alpha}^{+\infty}|g(u)|du+\int_0^{+\infty}|g(u)|du+\int_0^{t+\alpha}|g(u)|du$$
$$=2\int_0^{+\infty}|g(u)|du \quad (12)$$

Tương tự, không mất tính tổng quát ta giả thiết $t>\alpha$,

Từ (11), (12) và (13) ta nhận được

$$\int_0^{+\infty}|(f\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}g)(x)|\,dx\le\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}|f(t)|\,\mathrm{dt}\int_0^{+\infty}|\mathrm{g}(t)|\mathrm{dt}<+\infty$$

Vậy ta có $(f\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}g)(x)\in L(\mathbb{R}_+)$. Sau đây, ta chứng minh đẳng thức nhân tử hóa (10). Từ

$$\cos\alpha x(F_cf)(x)(F_cg)(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos\alpha x$$
$$\cos xu\cos xvf(u)\mathrm{g}(v)dudv$$

và

$$\cos\alpha x\cos xu\cos xv=\frac{1}{4}[\ \cos x(\mathrm{u}+\alpha+\mathrm{v})$$
$$+\cos x(\mathrm{u}+\alpha-\mathrm{v})+\cos x(\mathrm{u}-\alpha+\mathrm{v})$$
$$+\cos x(\mathrm{u}-\alpha-\mathrm{v})],$$

ta thu được

$$\cos\alpha x(F_cf)(x)(F_cg)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}[\cos x(\mathrm{u}+\alpha+\mathrm{v})$$
$$\cos x(\mathrm{u}+\alpha-\mathrm{v})+\cos x(\mathrm{u}-\alpha+\mathrm{v})$$
$$+\cos x(\mathrm{u}-\alpha-\mathrm{v})]f(u)\mathrm{g}(v)dudv. \quad (14)$$

Với phép đổi biến $u=y$ và $u+\alpha+v=t$ ta có

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos x(\mathrm{u}+\alpha+\mathrm{v})f(u)\mathrm{g}(v)dudv$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{y+\alpha}^{+\infty}\cos xtf(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{t}-\mathrm{y}-\alpha)dtdy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos xtf(\mathrm{y})\mathrm{g}(|\,\mathrm{t}-\mathrm{y}-\alpha\,|)dtdy$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{y+\alpha}\cos xtf(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{y}+\alpha-t)dtdy. \quad (15)$$

Tương tự, với phép đổi biến $u=y,\ u+\alpha-v=-t$ ta được

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos x(\mathrm{u}+\alpha-\mathrm{v})f(u)\mathrm{g}(v)dudv$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-y-\alpha}^{+\infty}\cos xtf(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{t}+\mathrm{y}+\alpha)dtdy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos xtf(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{t}+\mathrm{y}+\alpha)dtdy$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{-y-\alpha}^{0}\cos xtf(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{y}+t+\alpha)dtdy. \quad (16)$$

Hơn nữa ta có

$$\int_0^{+\infty}\int_{-y-\alpha}^{0}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{y}+t+\alpha)dtdy$$
$$=-\int_0^{+\infty}\int_{y+\alpha}^{0}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{y}+\alpha-t)dtdy$$
$$=\int_0^{+\infty}\int_0^{y+\alpha}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{y}+\alpha-t)dtdy \qquad (17)$$

Từ (15), (16) và (17) ta nhận được:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\big[\cos x(u+\alpha+v)$$
$$+\cos x(u+\alpha-v)\big]f(u)g(v)dudv$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos xt\big[g(|t-y-\alpha|)$$
$$+g(t+y+\alpha)\big]f(y)dtdy. \qquad (18)$$

Tương tự,

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos x(\mathrm{u}-\alpha+\mathrm{v})f(u)\mathrm{g}(v)dudv$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{y-\alpha}^{+\infty}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{t}-\mathrm{y}+\alpha)dtdy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_{y-\alpha}^{+\infty}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{t}-\mathrm{y}+\alpha)dtdy$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{+\infty}\int_{y-\alpha}^{+\infty}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{t}-\mathrm{y}+\alpha)dtdy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(|\,\mathrm{t}-\mathrm{y}+\alpha\,|)dtdy$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_{y-\alpha}^{0}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{t}-\mathrm{y}+\alpha)dtdy$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{+\infty}\int_0^{y-\alpha}\cos xt f(y)g(y-\alpha-t)dtdy. \qquad (19)$$

Với phép đổi biến $u=y, u-\alpha-v=-t$, ta thu được:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos x(\mathrm{u}-\alpha-\mathrm{v})f(u)\mathrm{g}(v)dudv$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_{\alpha-y}^{+\infty}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{t}+\mathrm{y}-\alpha)dtdy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_{\alpha-y}^{+\infty}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{t}+\mathrm{y}-\alpha)dtdy$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{+\infty}\int_{\alpha-y}^{+\infty}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{t}+\mathrm{y}-\alpha)dtdy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(|\,\mathrm{t}+\mathrm{y}-\alpha\,|)dtdy$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{\alpha}\int_0^{\alpha-y}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\alpha-\mathrm{y}-t)dtdy$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{\alpha}^{+\infty}\int_{\alpha-y}^{0}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{t}+\mathrm{y}-\alpha)dtdy. \qquad (20)$$

Mặt khác,

$$\int_0^{\alpha}\int_{y-\alpha}^{0}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{t}-\mathrm{y}+\alpha)dtdy$$
$$=\int_0^{\alpha}\int_0^{\alpha-y}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\alpha-y-t)dtdy, \qquad (21)$$

và

$$\int_{\alpha}^{+\infty}\int_{\alpha-y}^{0}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{t}+\mathrm{y}-\alpha)dtdy$$
$$=\int_{\alpha}^{+\infty}\int_0^{y-\alpha}\cos xt f(\mathrm{y})\mathrm{g}(\mathrm{y}-\alpha-t)dtdy. \qquad (22)$$

Từ (19), (20), (21) và (22), ta nhận được:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\big[\cos x(u-\alpha+v)$$
$$+\cos x(u-\alpha-v)\big]f(u)g(v)dudv$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}\cos xt\big[g(|t-y+\alpha|)$$
$$+g(|t+y-\alpha|)\big]f(y)dtdy \qquad (23)$$

Từ (14), (18) và (23), ta có

$$\cos\alpha x(F_C f)(x)(F_C g)(x)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{+\infty}\cos xt\Big\{\int_0^{+\infty}f(y)$$
$$\big[g(\mathrm{t}+\alpha+y)+g(|\,\mathrm{t}+\alpha-y\,|)$$
$$+g(|\,\mathrm{t}-\alpha+y\,|)+g(|\,\mathrm{t}-\alpha-y\,|)\big]dy\Big\}dt. \qquad (24)$$

Từ (9) và (24) ta có:

$$F_C\Big(f\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}g\Big)(x)=\cos x\big(F_C f\big)(x).\big(F_C g\big)(x).$$

Định lý được chứng minh.

Định lý 2.3. *Trong không gian các hàm liên tục thuộc* $L(\mathbb{R}_+)$, *tích chập với hàm trọng* $\gamma(\mathrm{y})=\cos\alpha y$ *đối với phép biến đổi tích phân Fourier cosine là giao hoán, kết hợp và phân phối.*

Chứng minh. Trước hết ta chứng minh tính chất kết hợp, nghĩa là**:**

$\Big(f\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}g\Big)\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}h=f\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}\Big(g\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}h\Big)$. Thực vậy,

$$F_C\Big[\Big(f\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}g\Big)\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}h\Big](y)$$
$$=\cos\alpha y F_C\Big(f\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}g\Big)(\mathrm{y})\big(F_C h\big)(\mathrm{y})$$
$$=\cos\alpha y\cos\alpha y\big(F_C f\big)(\mathrm{y})\big(F_C g\big)(\mathrm{y})\big(F_C h\big)(\mathrm{y})$$
$$=\cos\alpha y\big(F_C f\big)(\mathrm{y})F_C\Big(g\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}h\Big)(\mathrm{y})$$
$$=F_C\Big[f\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}\Big(g\overset{\gamma}{\underset{F_C}{*}}h\Big)\Big](y).$$

Suy ra $\left(f \underset{F_C}{\overset{\gamma}{*}} g\right) \underset{F_C}{\overset{\gamma}{*}} h = f \underset{F_C}{\overset{\gamma}{*}} \left(g \underset{F_C}{\overset{\gamma}{*}} h\right)$.

Tính giao hoán, tính phân phối được chứng minh tương tự.

Định nghĩa 2.4. Chuẩn của hàm f trong không gian $L(\mathbb{R}_+)$ được xác định bởi:

$$\| f \| = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} | f(x) | \, dx \cdot$$

Định lý 2.5. *Nếu* f, g là các hàm liên tục trong $L(\mathbb{R}_+)$ *thì ta có bất đẳng thức sau:*

$$\left\| \left(f \underset{F_C}{\overset{\gamma}{*}} g \right) \right\| \leq \| f \| . \| g \| .$$

Chứng minh. Từ chứng minh Định lý 2.2 ta có

$$\int_0^{+\infty} | (f \underset{F_C}{\overset{\gamma}{*}} g)(x) | \, dx \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} | f(x) | dx \int_0^{+\infty} | g(x) | dx.$$

Suy ra

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} | (f \underset{F_C}{\overset{\gamma}{*}} g)(x) | \, dx \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} | f(x) | dx \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} | g(x) | dx.$$

Vậy ta có $\left\| \left(f \underset{F_C}{\overset{\gamma}{*}} g \right) \right\| \leq \| f \| . \| g \| .$

Định lý 2.6. *Nếu* f, g là các hàm liên tục trong $L(\mathbb{R}_+)$ *thì ta có đẳng thức liên hệ sau:*

$$\left(f \underset{F_C}{\overset{\gamma}{*}} g \right)(x) = \frac{1}{2} \Big[(f \underset{F_C}{*} g)(\mathrm{x}+1) + (f \underset{F_C}{*} g)(|\mathrm{x}-1|) \Big], \forall x > 0,$$

ở đây $(f \underset{F_C}{*} g)$ được xác định trong (2).

3. ÁP DỤNG GIẢI PHƯƠNG TRÌNH TÍCH PHÂN

Trong phần này chúng ta áp dụng tích chập được đưa ra để giải phương trình tích phân kiểu Toeplitz-Hankel sau:

$$f(x) + \frac{\lambda}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} f(t) \big[g(x+\alpha+t) + g(|x+\alpha-t|) + g(|x-\alpha+t|) + g(|x-\alpha-t|) \big] dt = h(x), \tag{25}$$

ở đây $\lambda \in \mathbb{R}$ và g, h là các hàm liên tục trong $L(\mathbb{R}_+)$, f là ẩn hàm.

Định lý 3.1. *Với điều kiện* $1 + \lambda \cos \alpha y (F_C \, \mathrm{g})(y) \neq 0, \ \forall y \in \mathbb{R}_+$, *phương trình tích phân (25) tồn tại duy nhất nghiệm thuộc* $L(\mathbb{R}_+)$ xác định bởi:

$$f = h - \lambda \left(h \underset{F_C}{\overset{\gamma}{*}} \varphi \right).$$

Ở đây, $\varphi(x) \in L(\mathbb{R}_+)$ **và được xác định bởi:**

$$(F_C \varphi)(\mathrm{y}) = \frac{(F_C g)(\mathrm{y})}{1 + \lambda \cos \alpha y (F_C \, \mathrm{g})(y)}.$$

Chứng minh. Phương trình (25) có thể viết lại ở dạng:

$$f + \lambda \left(f \underset{F_C}{\overset{\gamma}{*}} g \right) = h.$$

Theo Định lý 2.2, ta có

$$(F_C f)(y) + \lambda \cos \alpha y (F_C f)(y)(F_C g)(y) = (F_C h)(y).$$

Từ điều kiện $1 + \lambda \cos \alpha y (F_C \, \mathrm{g})(y) \neq 0$ ta nhận được

$$(F_C f)(y) = (F_C h)(y) \left[1 - \frac{\lambda \cos \alpha y (F_C g)(y)}{1 + \lambda \cos \alpha y (F_C g)(y)} \right].$$

Theo Định lý Wiener-Levi, tồn tại hàm $\varphi(x) \in L(\mathbb{R}_+)$ sao cho:

$$(F_C \varphi)(y) = \frac{(F_C g)(y)}{1 + \lambda \cos \alpha y (F_C g)(y)}.$$

Điều đó dẫn tới

$$(F_C f)(y) = (F_C h)(y) [1 - \lambda \cos \alpha y (F_C \varphi)(y)].$$

Do đó

$$f(x) = h(x) - \lambda F_C [\cos \alpha y (F_C h)(y)(F_C \varphi)(y)].$$

Như vậy ta có

$$f = h - \lambda \left(h \underset{F_C}{\overset{\gamma}{*}} \varphi \right).$$

Theo Định lý 2.2, $f \in L(\mathbb{R}_+)$. Định lý được chứng minh.

REFERENCE

[1]. H. Bateman and A. Erdélyi (1954), *Tables of Integral Transforms Vol. 1*, McGraw-Hill, New YorkToronto-London.

[2]. V. A. Ditkin and A. Prudnikov (1974), *Integral Transformations and Operator Calculus (in Russian)*, Moscow.

[3]. F. D. Gakhov and Yu. I. Cherski (1978), *Equations of Convolutions Type (in Russian)*, Nauka, Moscow.

[4] . I. M. Gelfand, V. A. Raikov and G. E. Silov (1951), *Commutative Normalized Rings*, Nauka, Moscow.

[5] . I. S. Gradstein and I. M. Ruzuk (1962),

Integrals, Sums, Chains and Products Calculation Table, Moscow.

[6]. I. I. Hirchman and O. V. Widder (1955), *The Convolution Transform*, Princeton, New Jersey.

[7] . V. A. Kakichev (1967), On the convolution for integral transforms (in Russian), *Izv. AN BSSR, Ser. Fiz. Mat.*, no. 2, 48-57.

[8]. A. Kakichev, Nguyen Xuan Thao and Nguyen Thanh Hai (1996), Composition method to construting convolutions for integral transform, *Integral Transforms and Special Functions,* 4, no. 3, 235-242.

[9]. O. I. Marichev (1983), *Handbook of Integral Transforms of Higher Transcendeltal Functions. Theory and Algorithmic Tables*, New York - Bribane - Chicherter - Toronto.

[10]. Nguyen Xuan Thao and Nguyen Thanh Hai (1997), *Convolution for Integral Transforms and Their Applications*, Russian Academy, Moscow.

[11]. I. N. Sneddon (1951), *Fourier Transforms*, McGraw-Hill, New York.

[12]. E. C. Titchmarch (1937), *Introduction to Theory of Fourier Integrals*, Oxford Univ. Press.

[13]. I. Ya. Vilenkin (1958), Matrix elements of indecomsable unitary representations for motions group of the Labachebski's space and generalized Mehler-Fox transforms (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk. USSR*, 118 no. 2, 219-222.

[14]. S. B. Yakubovich and Yu. F. Luchko (1994), *The Hypergeometric Approach to Integral Transforms and Convolutions*, Kluwer.

KẾT LUẬN

Trong bài báo này chúng tôi đã xây dựng và nghiên cứu tích chập mới với hàm trọng $\gamma(y) = \cos\alpha y$ đối với phép biến đổi tích phân Fourier cosine đồng thời áp dụng để giải một lớp phương trình tích phân kiểu Toeplitz-Hankel.

ON THE CONVOLUTION WITH A WEIGHT FUNCTION $\gamma(y) = \cos\alpha y$ FOR FOURIER COSINE TRANSFORM

Abstract: The convolution with the weight function $\gamma(y) = \alpha \quad \cos \quad y$ for Fourier cosine integral transform is formulated and studied. The factorization equality, some properties and the relationship between the convolution with known convolution are established. In this paper, we also apply the new convolution to slove a class of integral equation of Toeplitz-Hankel type.

Keywords: Integral equation of Toeplitz-Hankel type; Convolution; Convolution with weight function; Fourier integral transform; Fourier cosine integral transform.

Ngày nhận bài: 26/11/2020. Ngày nhận đăng: 23/03/2021.

Liên lạc: Nguyễn Minh Khoa, e - mail: khoanm@epu.edu.vn