TẠP CHÍ KHOA HỌC – ĐẠI HỌC TÂY BẮC
Khoa học Tự nhiên và Công nghệ

Đoàn Thị Chuyên và nnk (2021)
(24): 109 - 112

TÍNH TAUT MẠNH CỦA KHÔNG GIAN PHỨC

Đoàn Thị Chuyên
Trường Đại học Tây Bắc - TBU

Tóm tắt: *Trong bài báo này, chúng tôi sẽ xây dựng một phản ví dụ về một không gian phức là taut nhưng không là taut mạnh. Tiếp theo, chúng tôi phát biểu và chứng minh một mở rộng của định lý Eastwood cho tính taut mạnh của không gian phức.*

Từ khóa: *Định lý của Eastwood; Tính taut; Tính taut mạnh; Không gian phức; Không gian phức hyperbolic.*

I. Đặt vấn đề

Các khái niệm về tính taut, tính taut mạnh của không gian phức đã được S. Kobayashi đưa ra vào đầu những năm 70 của thế kỉ trước (xem [6, p.240]). Những khái niệm này đóng vai trò quan trọng trong Hình học phức hyperbolic. Có rất nhiều sự quan tâm được dành cho các khái niệm này và các kết quả liên quan về vấn đề này được áp dụng cho nhiều lĩnh vực của toán học. Chi tiết xem trong [2][3][4][6][8].

Trong [6], Kobayashi đã chỉ ra một không gian phức là taut mạnh thì nó là taut (Định lý 2). Tuy nhiên, một không gian phức là taut thì có là taut mạnh hay không thì chưa được ông cũng như các nhà toán học khác chỉ ra.

Mục đích chính đầu tiên của bài báo này là xây dựng một phản ví dụ về một không gian phức là taut nhưng không là taut mạnh. Điều này chỉ ra rằng trường hợp ngược lại của Định lý 2 là không đúng.

Như chúng ta đã biết, Eastwood [5] (hoặc xem [6]) đã đưa ra điều kiện để một không gian phức là hyperbolic Kobayashi, kết quả này là một trong những kết quả quan trọng của Hình học phức hyperbolic. Ta nhắc lại định lý này.

Định lý **(Eastwood):** Giả sử *X*, *Y* là các không gian phức và $\pi: X \to Y$ là ánh xạ chỉnh hình. Nếu *Y* là hyperbolic (hyperbolic đầy) và nếu *Y* có một phủ mở $\{U_i\}$ sao cho mỗi $\pi^{-1}(U_i)$ là hyperbolic (hyperbolic đầy) thì *X* là hyperbolic (hyperbolic đầy).

Nhiều tác giả đã mở rộng kết quả này cho các tính chất khác của không gian phức như tính hyperbolic modulo một tập con giải tích, tính taut, tính taut modulo một tập con giải tích, xem [2][3][4][6][7][8].

Mục đích chính thứ hai của bài báo này là mở rộng định lý của Eastwood cho tính taut mạnh của không gian phức.

Cụ thể, chúng tôi sẽ chứng minh định lý sau.

Định lý **A:** Giả sử $\pi: X \to Y$ là ánh xạ chỉnh hình riêng giữa các không gian phức sao cho mỗi tập mở *U* của *Y* thì $\pi^{-1}(U)$ là taut trong *X*. Khi đó nếu *Y* là taut mạnh thì *X* là taut mạnh.

Toàn bộ nội dung bài báo được chúng tôi trình bày thành 3 mục. Mục 1 chúng tôi trình bày một số kiến thức chuẩn bị. Mục 2 chúng tôi dành cho việc xây dựng phản ví dụ về một không gian phức taut nhưng không phải taut mạnh. Mục 3 chúng tôi sẽ phát biểu và chứng minh định lý của Eastwood cho tính taut mạnh của không gian phức.

II. Nội dung

1. Nhắc lại một số kiến thức

Giả sử *X* là một không gian phức. Kí hiệu $\Delta = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| < 1\}$ là đĩa đơn vị mở trong mặt phẳng phức và $d_\Delta(a,b) := tanh^{-1}\dfrac{|a-b|}{|1-\bar{a}b|}$ là khoảng cách Poincare trên đĩa Δ.

Kí hiệu $Hol(\Delta, X)$ là họ các ánh xạ chỉnh hình từ Δ vào không gian phức *X*.

Bây giờ ta nhắc lại các khái niệm về tính taut và tính taut mạnh của không gian phức.

Định nghĩa 1 (xem [6, p.239]): Cho *X* là một không gian phức. Ta nói rằng *X* là taut nếu họ $Hol(\Delta, X)$ là chuẩn tắc, nghĩ là với mọi dãy $\{f_n\}$ trong $Hol(\Delta, X)$ thì một trong hai điều sau xảy ra:

i) tồn tại một dãy con của dãy $\{f_n\}$ hội tụ đều tới hàm $f \in Hol(\Delta, X)$ trong $Hol(\Delta, X)$;

ii) dãy $\{f_n\}$ là dãy phân kì compact trong

$Hol(\Delta, X)$, nghĩa là với mỗi tập compact $K \subset \Delta$ và với mỗi tập compact $L \subset X$, tồn tại một số nguyên dương N sao cho $f_n(K) \cap L = \varnothing$ với mọi $n \geq N$.

Định nghĩa 2 (xem [6, p.240]): Cho X là không gian phức. Ta nói rằng X là taut mạnh nếu với mỗi tập compact K trong Δ và mỗi tập compact L trong X, tồn tại các tập con compact $L_1, L_2, ..., L_m$ của L và các tập con mở taut $U_1, U_2, ..., U_m$ của X sao cho:

i) $L = \bigcup_{j=1}^{m} L_j$ và $L_j \subset U_j$ với mọi $j = 1, 2, ..., m$,

ii) nếu $f : \Delta \to X$ là ánh xạ chỉnh hình và $f(0) \in L_j$ thì $f(K) \subset U_j$.

Định lý 1: (Xem [6]) Giả sử X là một không gian phức. Khi đó X là taut khi và chỉ khi với mọi dãy $\{f_n\}$ trong $Hol(\Delta, X)$ luôn tồn tại một dãy con $\{f_{n_j}\}$ sao cho một trong hai điều sau xảy ra:

a) dãy $\{f_{n_j}\}$ hội tụ đều tới hàm $f \in Hol(\Delta, X)$ trong $Hol(\Delta, X)$;

b) dãy $\{f_{n_j}\}$ là dãy phân kì compact trong $Hol(\Delta, X)$.

Chứng minh: Dễ thấy, nếu X là taut thì các điều kiện a), b) trong Định lý 1 được thỏa mãn. Bây giờ giả sử các điều kiện a), b) trong Định lý 1 được thỏa mãn ta sẽ chứng minh X là taut. Giả sử ngược lại X không là taut. Lấy một dãy tùy ý $\{f_n\}$ trong $Hol(\Delta, X)$, do X không là taut nên cả hai điều kiện trong Định nghĩa 1 đều không thỏa mãn. Từ điều kiện ii) trong Định nghĩa 1 ta suy ra tồn tại tập compact $K \subset \Delta$ và tồn tại tập compact $L \subset X$ sao cho $f_n(K) \cap L = \varnothing$ với mọi n. Do đó, mọi dãy con $\{f_{n_j}\}$ của dãy $\{f_n\}$ đều phân kì compact. Do đó dãy $\{f_n\}$ không có bất kì một dãy con nào thỏa mãn một trong hai điều kiện của Định lí 1. Điều này là vô lý. Vậy X là taut.

Định lý **2** (xem Định lý 5.1.3 [6]): Cho X là một không gian phức. Nếu X là taut mạnh thì X là taut.

Chứng minh: Giả sử X là taut mạnh và dãy $\{f_n\}$ là một dãy tùy ý trong $Hol(\Delta, X)$. Giả sử tồn tại một tập compact $K \subset \Delta$ và một tập compact $L \subset X$ sao cho $f_n(K) \cap L = \varnothing$ với mọi n. Ta sẽ chứng minh tồn tại một dãy con của dãy $\{f_n\}$ hội tụ đều tới hàm $f \in Hol(\Delta, X)$ trong $Hol(\Delta, X)$. Mỗi số nguyên dương *n*, ta lấy tự đẳng cấu $g_n : \Delta \to \Delta$ sao cho $g_n(0) \in K$ và $f_n(g_n(0)) \in L$. Từ $g_n(0)$ là các điểm nằm trong một tập compact cố định *K* nên bằng cách lấy dãy con ta có thể giả sử dãy $\{g_n\}$ hội tụ đến một tự đẳng cấu *g* của Δ. Đặt $h_n = f_n \circ g_n$. Nếu ta chứng minh được dãy con của dãy $\{h_n\}$ hội tụ đều đến một ánh xạ $h \in Hol(\Delta, X)$ thì điều này có nghĩa là dãy con tương ứng của $\{f_n\}$ hội tụ đến ánh xạ $f = h \circ g^{-1}$. Với mỗi số thực cố định $r < 1$, dãy $\{h_n\}$ luôn có một dãy con hội tụ đều trên đĩa $\overline{\Delta_r} = \{z \in \mathbb{C} : \|z\| \leq r\}$. Từ định nghĩa của tính taut mạnh ta có các tập con compact $L_1, L_2, ..., L_m$ của L và các tập con mở taut $U_1, U_2, ..., U_m$ của X sao cho:

i) $L = \bigcup_{j=1}^{m} L_j$ và $L_j \subset U_j$ với mọi $j = 1, 2, ..., m$,

ii) nếu $f : \Delta \to X$ là ánh xạ chỉnh hình và $f(0) \in L_j$ thì $f(\overline{\Delta_r}) \subset U_j$. Từ $h_n(0) \in L = \bigcup_{j=1}^{m} L_j$ với mọi *n*. Bằng cách lấy dãy con của dãy $\{h_n\}$ nếu cần thiết, ta có thể giả sử rằng $h_n(0)$ thuộc một tập con compact cố định L_j với mọi *n* và do đó $h_n(\overline{\Delta_r}) \subset U_j$. Lại do U_j là taut và $h_n(0)$ thuộc một tập con compact cố định L_j với mọi *n* nên dãy $\{h_n\}$ hội tụ đều đến một ánh xạ $h \in Hol(\Delta, X)$ trên $\overline{\Delta_r}$.

Định nghĩa 3 (xem [1]): Ánh xạ $f : X \to Y$ từ không gian phức *X* vào không gian phức *Y* được gọi là ánh xạ riêng nếu với mọi tập compact *L* trong *Y* thì $f^{-1}(L)$ là tập compact trong *X*.

Một số tính chất của ánh xạ chỉnh hình riêng có thể xem trong [1].

2. Phản ví dụ cho tính taut mạnh của không gian phức

Trong mục này chúng tôi sẽ xây dựng một không gian phức taut *X* nhưng không phải là không gian phức taut mạnh bằng cách dính một số đếm được các đĩa mở đơn vị $\Delta_1, \Delta_2, ...$ với nhau theo cách sau đây.

Với mỗi *n*, trong đĩa đơn vị Δ_n thứ *n*, ta chọn điểm a_n sao cho $d_{\Delta_n}(a_n, 0) = \frac{1}{2^n}$.

Đầu tiên, ta dính đĩa Δ_2 với đĩa Δ_1 bằng cách đồng nhất điểm a_1 của Δ_1 với gốc *0* của Δ_2. Tiếp theo, ta dính đĩa Δ_3 với đĩa Δ_2 bằng cách đồng nhất điểm a_2 của Δ_2 với gốc *0* của Δ_3. Tổng quát, ta dính đĩa Δ_{n+1} với đĩa Δ_n bằng cách đồng nhất điểm a_n của Δ_n với gốc *0* của

Δ_{n+1}. Ta kí hiệu không gian kết quả là *X*. Ta thấy các đĩa $\Delta_n, n=1,2,...$ là những thành phần không thể thiếu của *X*. Do mọi ánh xạ chỉnh hình $f:\Delta \to X$ biến Δ vào Δ_n, là một trong các thành phần không thể thiếu nào đó của *X* nên họ $Hol(\Delta, X)$ là hợp của các họ con $Hol(\Delta,\Delta_n)$. Lấy $\{f_j\}$ là một dãy bất kỳ trong $Hol(\Delta, X)$. Giả sử rằng $\{f_j\}$ không có bất kì một dãy con hội tụ nào. Ta sẽ chứng minh dãy $\{f_j\}$ phân kì compact và do đó *X* là taut. Thật vậy, ta lấy một dãy con $\{f_{n_j}\}$ của dãy $\{f_j\}$ gồm tất cả các ánh xạ $f_j:\Delta\to\Delta_n$. Do họ $Hol(\Delta,\Delta_n)$ là chuẩn tắc nên dãy $\{f_{n_j}\}$ phải phân kì compact. Giả sử *L* là một tập compact tùy ý trong *X*. Dễ thấy *L* sẽ chứa trong tập $\Delta_1\cup\Delta_2\cup\cdots\cup\Delta_k$ với một số nguyên dương *k* nào đó. Lấy *K* là một tập compact tùy ý trong Δ. Khi đó với mỗi số nguyên dương *n* mà $n\le k$ ta luôn có $f_{n_j}(K)\cap L=\varnothing$ với mọi f_{n_j} trừ một số hữu hạn. Do $\Delta_n\cap L=\varnothing$ với mọi $n>k$ nên $f_{n_j}(K)\cap L=\varnothing$ với mọi $n>k$. Do đó dãy $\{f_j\}$ là phân kì compact và do đó *X* là taut.

Bây giờ ta sẽ chứng minh *X* không phải là taut mạnh. Lấy dãy điểm $\{z_n\}_{n\ge1}$ trong Δ thỏa mãn $d_\Delta(z_n,0)=\frac{1}{2^n}$. Lấy $K=\{z_n\}\cup\{0\}$ là tập con compact của Δ. Lấy $L=\overline{\Delta_{\frac{1}{2}}}=\left\{a\in\Delta_1:\|a\|\le\frac{1}{2}\right\}$ là tập con compact và $U=\Delta_1$ là tập mở taut trong *X*. Xét ánh xạ chỉnh hình $f:\Delta\to X$ được xác định $f(z_n)=a_n$ và $f(0)=0$. Dễ thấy rằng $f(0)\in L$ nhưng $f(K)\not\subset U$. Vậy *X* không phải là taut mạnh.

3. Định lý Eastwood cho tính taut mạnh của không gian phức

Định lý A: Giả sử $\pi: X\to Y$ là ánh xạ chỉnh hình riêng giữa các không gian phức sao cho mỗi tập mở *U* của *Y* thì $\pi^{-1}(U)$ là taut trong *X*. Khi đó nếu *Y* là taut mạnh thì *X* là taut mạnh.

Chứng minh: Lấy *K* là tập compact trong Δ và *L* là tập compact trong *X*. Đặt $L'=\pi(L)$. Khi đó L' là tập compact trong *Y*. Theo giả thiết, *Y* là taut mạnh nên tồn tại các tập compact $L'_1, L'_2,...,L'_m$ của L' các tập mở taut $U'_1,U'_2,...,U'_m$ của *Y* sao cho $L'=\bigcup_{j=1}^m L'_j$ và $L'_j\subset U'_j$.

Đặt $L_j=\pi^{-1}(L'_j)$ và $U_j=\pi^{-1}(U'_j)$. Do π là ánh xạ chỉnh hình riêng nên L_j là compact của *L* và U_j là các tập mở taut trong *X*.

Hiển nhiên $L=\bigcup_{j=1}^m L_j$ and $L_j\subset U_j$.

Lấy $f:\Delta\to X$ là ánh xạ chỉnh hình và $f(0)\in L_j$. Khi đó $\pi(f(0))\in\pi(L_j)=L'_j$ và do đó $\pi(f(K))\subset U'_j$. Từ đây suy ra $f(K)\subset\pi^{-1}(U'_j)=U_j$. Vậy *X* là taut mạnh.

Hệ quả: Giả sử $\pi: X\to Y$ là ánh xạ hữu hạn riêng giữa hai không gian phức *X*, *Y*. Khi đó nếu *Y* là taut mạnh thì *X* là taut mạnh.

III. Tài liệu tham khảo

[1]. Bedford E., Proper holomorphic mappings. Bull. Amer. Math. Soc. 10(1984), 157-175.

[2]. Do Duc Thai and Pham Viet Duc, *On the complete hyperbolicity and the tautness of the Hartogs domains*, Intern. J. Math. 11 (2000), 103-111.

[3] Do Duc Thai, Pascal J. Thomas, Nguyen Van Trao, and Mai Anh Duc, *On hyperbolicity and tautness modulo an analytic subset of hartogs domains*, Proceedings Of The American Mathematical Society, Volume 141, Number 10, October 2013, Pages 3623–3631

[4]. Do Duc Thai, *Royden-Kobayashi pseudometrie and tautness of normalizations of complex spaces*, Bolletino U. M. L (7) 5-A (1991), 147-156.

[5]. Eastwood, *A. Apropos des variétés hyperboliques complètes*. C. R. Acad. Sci. Paris 280 (1975), 1071-1074.

[6]. S. Kobayashi, *Hyperbolic complex spaces*, Springer-Verlag, Berlin, 1998., p64

[7]. Nguyen Van Trao and Tran Hue Minh, *Remarks on the Kobayashi hyperbolicity of complex spaces*, Acta Math. Vietnam. 34 (2009), 375-387.

[8]. Pham Viet Duc, Mai Anh Duc, Pham Nguyen Thu Trang, *On Tautness Modulo an Analytic Subset of Complex Spaces*, Acta Math Vietnam (2017) 42:717-726.

ON STRONG TAUTNESS OF COMPLEX SPACES

Đoan Thi Chuyen
Tay Bac University - TBU

Abstract: *In this paper, we will construct a counter example about a complex space namely "taut", but it is not strongly taut. Next, we claim and prove an extension version of Eastwood theorem for strong tautness of complex spaces.*

Keywords: *Eastwood theorem; Tautness; Strong tautness; Complex spaces; Hyperbolic complex spaces.*

Ngày nhận bài: 09/01/2021. Ngày nhận đăng: 23/03/2021.

Liên lạc: Đoàn Thị Chuyên; e-mail: doanchuyenkt@utb.edu.vn