# DÁNG ĐIỆU TIỆM CẬN NGHIỆM BỊ CHẶN CỦA PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN BẬC PHÂN SỐ

**Nguyễn Thanh Tùng, Lê Văn Kiên**
*Trường Đại học Tây Bắc*

***Tóm tắt:*** *Bài báo đưa ra việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của các nghiệm của phương trình khuếch tán bậc phân số có dạng $D_C^\alpha u(t) = \Delta u(t) + f(t)$ với $t \in [0;+\infty)$ trong đó $D_C^\alpha u(t)$ là đạo hàm của hàm $u$ theo nghĩa Caputo, là toán tử Laplace trên không gian X=$L_2$ (Ω) và $f$ là hàm bị chặn đa thức. Kết quả chính khẳng định rằng nếu $u$ là nghiệm nhẹ của bài toán Cauchy nếu thỏa mãn các điều kiện liên tục đều bị chặn trong BUC($R_+$,X) với chuẩn có trọng đa thức thì hội tụ về không trong không gian này, và thỏa mãn một số điều kiện ergodic. Kết quả thu được mở rộng một số kết quả đã biết về tính ổn định của các nghiệm đối với phương trình khuếch tán bậc phân số.*

Toán tử $\Delta$ là toán tử cụ thể ứng dụng trong [7] để nghiên cứu các Phương trình khuếch tán, có nhiều ứng dụng trong Lý thuyết phương trình đạo hàm riêng. Chúng tôi chỉ ra trường hợp cụ thể này như một bức tranh minh họa về phổ và giải thức về toán tử Laplace trong trường hợp này là rời rạc đếm được vì vậy điều kiện về phổ của nó giao với trục ảo là đếm được. Chúng tôi sử dụng ký hiệu $\mathbb{R},\mathbb{R}^+,\mathbb{C},\mathbb{X}$ tương ứng là tập số thực, tập số thực không âm, tập số phức và không gian Banach thực (hoặc phức). Trong trường hợp không làm thay đổi kết quả, ta sử dụng ký hiệu $J$ là tập hợp thay cho $\mathbb{R}$ hoặc $\mathbb{R}^+$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, kí hiệu $BC_n(\mathbb{R}^+, X)$ là không gian các hàm $f$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ có giá trị trong không gian Banach $X$ thỏa mãn

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{\| f(t) \|_X}{(1+t)^n} < +\infty. \qquad (1)$$

$BC_n(\mathbb{R}^+, X)$ cùng với chuẩn xác định (1) là không gian định chuẩn.

Ta nói rằng, hàm $f : \mathbb{R}^+ \to X$ là $n-$ hàm liên tục đều nếu nó liên tục và

$$\lim_{t\downarrow 0} \sup_{t\in\mathbb{R}^+} \frac{\| f(t+h) - f(t) \|_X}{(1+t)^n} = 0. \qquad (2)$$

$n-$ hàm $f$ liên tục trên $\mathbb{R}^+$ có giá trị trong $X$ được ký hiệu bởi $BUC_n(\mathbb{R}^+, X)$. Không gian này cùng với chuẩn xác định bởi (2) là không gian Banach (xem [7, Bổ đề 2.3]).

**Ví dụ 1.1.** Cho $f \in BC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. Nếu đạo hàm $f' \in BC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ thì $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$.

Ký hiệu

$$C_{0,n}(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}) := \left\{ f \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}) : \lim_{t\to\infty} \frac{\| f(t) \|}{(1+t)^n} = 0 \right\}.$$

Ta chứng minh được rằng $C_{0,n}(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ là một không gian con đóng $BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ và bất biến theo nửa nhóm dịch chuyển $\{S(t)\}_{t\ge 0}$.

**Định nghĩa 1.1** Hàm Gamma $\Gamma$ là hàm được xác định bởi hệ thức

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx.$$

Ở đó $p$ là một số thực bất kỳ.

Từ Định nghĩa 1.1 ta có

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \Gamma(n) = (n-1)!, n \in \mathbb{N},$$
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \Gamma(n + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!, n \in \mathbb{N}.$$

### 1.1 Đạo hàm theo nghĩa Caputo

Định nghĩa.1.2 Cho trước một số thực dương $\alpha$ và $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Đạo hàm bậc phân số Riemann-Liouville cấp $\alpha$ của hàm $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ được cho bởi

$$ {}^{RL}_{t_0}D_t^{\alpha} f(t) := \frac{d^n}{dt^n}[I_{t_0}^{n-\alpha} f(t)] = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \cdot \frac{d^n}{dt^n}\left(\int_{t_0}^{t}(t-s)^{n-\alpha-1} f(s)ds\right), $$

trong đó $n := [\alpha]$ là số nguyên nhỏ nhất lớn hơn hoặc bằng $\alpha$ và $\frac{d^n}{dt^n}$ là đạo hàm thông thường cấp $n$.

**Ví dụ.1.2** Cho hàm

$$ f(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases} $$

Sử dụng Định nghĩa (1.2), ta xác định được đạo hàm phân số Riemann-Liouville cấp $\alpha$ của hàm $f(t): {}^{RL}_{0}D_t^{\alpha} f(t) = \frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$.

Với mỗi $t > 0$ và $\alpha > 0$, ta xét hàm $g_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$. Giả sử $a \geq 0$ là số đã cho, hàm

$$ J_a^{\alpha} u(t) := (g_\alpha * u)(t) = \int_a^t g_\alpha(t-\tau)u(\tau)d\tau, t \geq a $$

được gọi là toán tử đạo hàm phân số Riemann-Liouville bậc $\alpha$. Hàm

$$ D_C^{\alpha} u(t) := \begin{cases} J^{n-\alpha}u^{(n)}(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t \frac{u^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, & n-1 < \alpha < n \in \mathbb{N}, \\ u^{(n)}(t), & \alpha = n \in \mathbb{N}, \end{cases} $$

được gọi là đạo hàm phân số Caputo bậc $\alpha$. Với mỗi $0 < \alpha \leq 1$, ta có

$$ D_C^{\alpha} u(t) = J^{1-\alpha}u(t) \Leftrightarrow J_a^{\alpha} D_C^{\alpha} u(t) = J_a u(t) = \frac{1}{\Gamma(1)}\int_a^t u(\tau)d\tau = u(t) - u(a). $$

**Ví dụ 1.3** Lấy $a = 0, \alpha = \frac{1}{2}, n = 1, f(t) = t$, ta có

$$ D_C^{\frac{1}{2}} t = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^t \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau = \frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}}. $$

**1.2 Bài toán Cauchy**

Cho một số cố định $0 < \alpha \leq 1$, ta xét bài toán Cauchy $D_C^{\alpha} u(t) = \Delta u(t),\ u(0) = x$ (4)

Khi đó ta có, $u(t) - u(0) = J_0^{\alpha} D_C^{\alpha} u(t) = J_0^{\alpha} \Delta u(t) = \int_0^t g_\alpha(t-s)\Delta u(s)ds$, tức là

$$ u(t) = x + \int_0^t g_\alpha(t-s)\Delta u(s)ds. \quad (5) $$

Trong bài báo này, ta xét phương trình tuyến tính không thuần nhất dạng

$$ D_C^{\alpha} u(t) = \Delta u(t) + f(t), t \geq 0. \quad (6) $$

Ở đó $0 < \alpha \leq 1$ là cố định $f \in C_{0,n}(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ đã cho.

**Định nghĩa 1.3** Nghiệm nhẹ $u$ của phương trình (6) trên $\mathbb{R}^+$ là một hàm liên tục trên $\mathbb{R}^+$, thỏa mãn với mỗi $t \in \mathbb{R}^+, J^{\alpha}u(t) \in D(\Delta)$ và

$$ u(t) = x + \Delta\left(\int_a^t g_\alpha(t-\tau)u(\tau)d\tau\right) + \int_a^t g_\alpha(t-\tau)f(\tau)d\tau. \quad (7) $$

**1.3 Lý thuyết phổ của các hàm đa thức bị chặn**

Với mỗi $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, biến đổi Laplace của $f$,

$$\zeta f(\lambda) := \int_0^\infty e^{-\lambda t} f(t)dt$$

tại với mọi $\Re\lambda > 0$ ($\Re\lambda$ là phần thực của $\lambda \in \mathbb{C}$) vì vậy định nghĩa phổ $Sp_+(f)$ như tập hợp của tất cả các số thực $\xi_0$, sao cho biến đổi Laplace của nó không có thác triển giải tích cho bất kỳ vùng lân cận nào của $i\xi_0$. Vấn đề đặt ra phổ này có thể kiểm soát dáng điệu tiệm cận của hàm $f$ trên nửa trục $\mathbb{R}^+$ là không rõ ràng do tính không bị chặn của các hàm đa thức bị chặn $f$. Trong phần tiếp theo chúng ta sẽ thảo luận về cách tiếp cận lý thuyết phổ của $f$ và làm thế nào trong một số điều kiện "ergodic", nó kiểm soát dáng điệu của các hàm $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$. Chúng ta sẽ bắt đầu với nửa nhóm dịch chuyển $(S(t)_{t\geq 0})$ trong $BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, chẳng hạn $S(t)f := f(t+\cdot)$ với mỗi $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$.

**Bổ đề 1.1** ([7]) Với mỗi $t \geq 0$, ta có

$$\| S(t) \|_n \leq (1+t)^n. \qquad (8)$$

Kí hiệu $\mathcal{D}$ là kí hiệu toán tử vi phân $\frac{d}{dt}$ trong $BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ với miền xác định $D(\mathcal{D}) = \{f \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}) : \exists f' \in BUC_n(\mathbb{R}, \mathbb{X})\}$. Các khẳng định sau đây là đúng.

1. Nửa nhóm dịch chuyển $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ trong $BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ liên tục mạnh;

2. Hàm sinh vô hạn $G$ của $\{S(t)\}_{t\geq 0}$ là toán tử đạo hàm D trong $BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$.

**1.4 Toán tử $\widetilde{\mathcal{D}}$**

Trong không gian $BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ ta xét quan hệ $R$ như sau

$$f\ R\ g \text{ nếu và chỉ nếu}$$
$$f - g \in C_{0,n}(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}), \ (9)$$

là một quan hệ tương đương. Không gian thương $BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})/R$ là không gian Banach. Đối với mỗi đại diện $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, ta ký hiệu $\widetilde{f}$ là phần tử thuộc $BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})/R$. Toán tử $\widetilde{\mathcal{D}}$ trong $BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})/R$ có miền xác định và được xác định như sau:

$$D(\widetilde{\mathcal{D}}) = \{\widetilde{f} \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})/R : \exists u \in \widetilde{f}, u \in D(\mathcal{D}), \widetilde{\mathcal{D}}\widetilde{f} := \widetilde{\mathcal{D}u}\}$$

**Bổ đề 1.3** $\widetilde{\mathcal{D}}$ là một toán tử tuyến tính đơn trị.

Với mỗi $f \in BUC_n(\mathbb{R}, \mathbb{X})$, ta xét hàm phức $\hat{f}(\lambda)$ theo $\lambda \in \mathbb{C}$ xác định bởi $\hat{f}(\lambda) := (\lambda - \widetilde{\mathrm{D}})^{-1}\widetilde{f}$.

**Bổ đề 1.4** ([7]) $\hat{f}(\lambda)$ tồn tại như một hàm giải tích của $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$. Ngoài ra, với mọi $\lambda \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ thì

$$\left\|(\lambda - \widetilde{\mathrm{D}})^{-1}\widetilde{f}\right\|_n \leq \frac{e^{\Re\lambda}\Gamma(n+1, \Re\lambda)}{(\Re\lambda)^{n+1}}\left\|\widetilde{f}\right\|_n. \qquad (10)$$

**Định nghĩa 1.4** Với $n \in \mathbb{N}$ cố định và $f \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$, tập hợp tất cả các điểm $\xi_0 \in \mathbb{R}$ sao cho $\hat{f}(\lambda)$ không có thác triển giải tích cho bất kỳ lân cận nào của $i\xi_0$ được gọi là phổ của $f$, kí hiệu bởi $\sigma_n(f)$.

**Bổ đề 1.5** ([7]) Cho $N$ là số tự nhiên và $f(z)$ là hàm phức lấy giá trị trong $\mathbb{X}$ và chỉnh hình trong $\mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}$ sao cho với mỗi số dương $M$ độc lập với $z$ thỏa mãn

$$\| f(z) \| \leq \frac{M}{|\Re z|^N}, \quad \forall \Re z \neq 0, |\Re z| < 1. \quad (12)$$

Giả sử thêm rằng $i\xi \in i\mathbb{R}$ là một điểm cô lập của $f(z)$ mà tại đó khai triển Laurent có dạng

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-i\xi)^n,\quad a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-i\xi|=r}\frac{f(z)}{(z-i\xi)^{n+1}}dz. \quad (13)$$

Khi đó

$\| r^2 a_{-(n+1)}+a_{-(n+3)} \| \le 2Mr^{n+2},\quad n\in Z.$ (14)

Khi đó, $i\xi_0$ là một điểm cô lập của $\hat{g}$.

**Định lý 1.1** ([7])Cho $g\in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$. Khi đó

1. Nếu $\xi_0$ là một điểm cô lập thuộc $\sigma_n(g)$ thì $i\xi_0$ hoặc là điểm cực hoặc là điểm kỳ dị $\hat{g}(\lambda)$ có bậc nhỏ hơn $n+1$;

2. Nếu $\sigma_n(g)=\varnothing$, thì $g\in C_{0,n}(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$;

3. $\sigma_n(g)$ là tập con đóng của $\mathbb{R}$.

**Hệ quả 1.1** ([7]) Cho $g\in BUC_n(\mathbb{R}^+,X)$ thì $i\xi_0$ là một điểm cô lập của $\hat{g}(\lambda)$ ở đó $\xi_0\in\mathbb{R}$, thì

$$\lim_{\eta\downarrow 0}\eta R(\eta+i\xi_0,\widetilde{\mathrm{D}})\widetilde{g}=0. \quad (15)$$

## 2. Kết quả chính

Áp dụng lý thuyết phổ của các $n-$ hàm bị chặn (đã được đưa ra trong phần trước) để nghiên cứu dáng điệu tiệm cận của các nghiệm nhẹ cho các phương trình khuếch tán bậc phân số có dạng $\begin{cases} D_C^\alpha u(t)=\Delta u(t)+f(t),\\ u(0)=x,\end{cases}$

ở đó $0<\alpha\le 1$ cố định, $f$ là một phần tử của $C_{0,n}(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ . Nhớ lại rằng nghiệm nhẹ $u$ trên $\mathbb{R}^+$ của bài toán là hàm liên tục trên $\mathbb{R}^+$, thỏa mãn $J^\alpha u(t)\in D(\Delta)$ và

$$u(t)=x+\Delta\left(\int_a^t g_\alpha(t-\tau)u(\tau)d\tau\right)+\int_a^t g_\alpha(t-\tau)f(\tau)d\tau, \qquad (16)$$

với mọi $t\in\mathbb{R}^+$ và

$$u(t)=x+\Delta J^\alpha u(t)+J^\alpha f(t), \forall t\in\mathbb{R}^+. \ (17)$$

### 2.1 Ước lượng phổ của $n-$ nghiệm bị chặn

Ta ký hiệu $\rho(\Delta,\alpha)$ là tập tất cả $\xi_0\in\mathbb{C}$ sao cho $(\lambda^\alpha-\Delta)$ có nghịch đảo $(\lambda^\alpha-\Delta)^{-1}$ là hàm giải tích trong một lân cận của $\xi_0$ và ký hiệu bởi $\Sigma(\Delta,\alpha):=\mathbb{C}\setminus\rho(\Delta,\alpha)$.

Trước hết, ta giả thiết rằng $\Re\lambda>0$. Khi đó với mỗi $n-$ hàm bị chặn $h$, từ Bổ đề 1.4 , ta có

$$\hat{h}(\lambda)=(\lambda-\widetilde{\mathrm{D}})^{-1}\tilde{h}=\widetilde{g},$$

ở đó

$$g(t)=\int_t^\infty e^{\lambda(t-s)}h(s)ds=\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}h(t+\xi)d\xi.$$

Do đó với mỗi $h\in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$, $[\hat{h}(\lambda)](t)=\zeta(\widetilde{S(t)h})(\lambda)$.

Tiếp theo, với mỗi $s\in\mathbb{R}^+$, đặt $u_s(t):=u(t+s), f_s(t):=f(t+s)$ với mọi $t\ge 0$, ta có

$$u_s(t)=\Delta J_s^\alpha u_s(t)+J_s^\alpha f_s(t)+u(s). \qquad (18)$$

Biến đổi Laplace hai vế của (18) ta được $\zeta u_s(\lambda)=\lambda^{-\alpha}\Delta\zeta u_s(\lambda)+\lambda^{-\alpha}\zeta f_s(\lambda)+\lambda^{-1}u(s)$. Do đó

$$\lambda^{1-\alpha}(\lambda^\alpha-\Delta)\zeta u_s(\lambda)=\lambda^{1-\alpha}\zeta f_s(\lambda)+u(s).$$

Tiếp theo, với mỗi $\lambda$ thuộc lân cận của điểm $i\xi_0$ ở đó $\xi_0\in\rho(\Delta,\alpha)$ và $\xi_0\ne 0$,

$$\zeta u_s(\lambda)=(\lambda^\alpha-\Delta)^{-1}\zeta f_s(\lambda)+\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha-\Delta)^{-1}u(s).$$

Nhắc lại rằng

$$\zeta(S(s)u)(\lambda)=\zeta u_s(\lambda), \zeta(S(s)f)(\lambda)=\zeta f_s(\lambda).$$

Do đó

$$\hat{u}(\lambda)=(\lambda^\alpha-\Delta)^{-1}\hat{f}(\lambda)+\lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha-\Delta)^{-1}\ \tilde{u}.$$

Như đã giả thiết, $f \in C_{0,n}(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}), \hat{f}(\lambda) = 0,$ do đó, với $\Re\lambda > 0,$ $\hat{u}(\lambda) = \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - \Delta)^{-1}\tilde{u}.$ (19)

Ta ký hiệu $R_\alpha(\lambda, \Delta) := \lambda^{\alpha-1}(\lambda^\alpha - \Delta)^{-1}.$

**Bổ đề 2.1 ([7])** Cho $u \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}), \xi_0 \in \mathbb{R}$ và hàm $G(\lambda)$ (theo biến $\lambda$) là một thác triển giải tích của hàm $\hat{u}(\lambda) = (\lambda - \widetilde{\mathrm{D}})^{-1}\tilde{u}$ với $\Re\lambda > 0$ trên đĩa mở $B(i\xi_0, r)$ $(r > 0)$. Khi đó, $G(\lambda) = \hat{u}(\lambda)$ với $\Re\lambda < 0$ trên đĩa $B(\xi_0, r)$.

*Chứng minh.* Trong $B(\xi_0, r)$, hàm $\lambda \mapsto (\lambda - \widetilde{\mathrm{D}})R(1, \widetilde{\mathrm{D}})G(\lambda)$ là một hàm giải tích. $B(i\xi_0)$ với $\Re\lambda > 0,$

Khi đó, trong $B(i\xi_0)$ với $\Re\lambda > 0$

$$\begin{aligned}(\lambda - D)R(1, D)G(\lambda) &= (\lambda - D)R(1, D)R(\lambda, D)u \\ &= R(1, D)(\lambda - D)R(\lambda, D)u \\ &= R(1, D)u\end{aligned}$$

Điều này suy ra rằng hàm $\lambda \mapsto (\lambda - \widetilde{\mathrm{D}})R(1, \widetilde{\mathrm{D}})G(\lambda)$ là một hàm hằng $R(1, \widetilde{\mathrm{D}})\ \tilde{u}$ trên toàn bộ $B(i\xi_0, r)$.

Do đó, nếu $\Re\lambda < 0,$ $R(1, \widetilde{\mathrm{D}})G(\lambda) = R(\lambda, \widetilde{\mathrm{D}})R(1, \widetilde{D})\tilde{u} = R(1, \widetilde{\mathrm{D}})R(\lambda,\ \widetilde{\mathrm{D}})\tilde{u}.$ Do đó, với $\Re\lambda < 0,$ theo chứng minh trên ta có $G(\lambda) = R(\lambda, \widetilde{\mathrm{D}})\tilde{u}.$

**Hệ quả 2.1** ([7]) Cho $u \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ là một nghiệm nhẹ của Bài toán (6) thì

$$i\sigma_n(u) \subset \Sigma(\Delta, \alpha) \cap i\mathbb{R}. \quad (20)$$

*Chứng minh.* Áp dụng Bổ đề 2.1 ta thấy rằng tập hợp các điểm $i\xi$ với $\xi \in \mathbb{R}$ sao cho $\hat{u}(\lambda)$ với $\Re\lambda > 0$ có thác triển giải tích trong miền lân cận của $i\xi$. Do (19) nên hệ quả được chứng minh.

**Định nghĩa 2.1** Hàm $h \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ được cho là *$n-$ergodic đều tại $i\eta$ nếu với mọi* $0 \le j \le n+1,$

$$M_\eta^j(h) := \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^j R(\alpha + i\eta, \mathrm{D})h$$

*tồn tại trong* $BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X}).$

**Định lý 2.1** *Cho $u \in BUC_n(\mathbb{R}^+, \mathbb{X})$ là một nghiệm nhẹ của Bài toán (6). Giả sử rằng*

*1.* $\Sigma(\Delta, \alpha) \cap i\mathbb{R}$ *là* đếm được;

*2. $u$ là $n-$ ergodic* đều *tại mỗi $i\eta$ của tập này, và $M_\eta^j(u) = 0$ với mỗi $0 \le j \le n+1.$* Khi đó

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{(1+t)^n} = 0. \quad (21)$$

*Chứng minh.* Do hệ quả 2.1 $i\sigma_n(u) \subset \Sigma(A, \alpha) \cap i\mathbb{R}.$ Vì vậy, theo điều giả sử thứ nhất thì nó là đếm được.Bởi điều giả sử thứ hai, ta khẳng định rằng $\sigma_n(u)$ là tập rỗng. Thật vậy, vì $i\sigma_n(u)$ là đếm được và đóng, nên nếu nó không là tập rỗng thì nó sẽ có một điểm cô lập, chẳng hạn $i\xi_0.$ Do đó, $i\xi_0$ là một điểm cô lập của $\hat{u}(\lambda).$ Bởi Định lý 1.1 , $i\xi_0$ là điểm đơn cực. Tuy nhiên, do điều giả sử thứ hai và Hệ quả 1.1, điểm cực đơn này bị loại bỏ. Điều này có nghĩa là $i\xi_0$ là một điểm chính quy của $\hat{u}(\lambda),$ vì vậy $\xi_0 \notin \sigma_n(u).$

Điều này mâu thuẫn với chứng minh rằng $\sigma_n(u)$ là rỗng. Do đó Định lý 1.1, $u \in C_{0,n}(\mathbb{R}^+, X).$ Định lý được chứng minh.

Khi $f = 0,$ Bài toán (6) trở thành Bài toán (4). Nghiệm mềm của bài toán (4) xác định trên một khoảng $\mathbb{R}^+$ là một hàm liên tục $u$ xác định trên $J$ thỏa mãn (5) với mọi $t \ge 0$

Định **nghĩa 2.2** Một họ các toán tử $\{S_\alpha(t)\}_{t\ge0} \subset \mathfrak{L}(\mathbb{X})$ được gọi là toán tử giải thức của (4) nếu

- $\{S_\alpha(t)\}_{t\ge0}$ là liên tục mạnh và $S_\alpha(0) = I,$
- $S_\alpha(t)\mathcal{D}(\Delta) \subset \mathcal{D}(\Delta),$ và $\Delta S_\alpha(t)x = S_\alpha(t)\Delta x, x \in \mathcal{D}(\Delta), t \ge 0,$
- $S_\alpha(t)x$ là một nghiệm của (4) với mọi $x \in D(\Delta).$

Nếu Bài toán (4) có một toán tử giải thức $S_\alpha(t),$ thì (xem [8, Proposition 1.1]) với mỗi nghiệm nhẹ $u$ là một dạng $u(t) = S_\alpha(t)u(0).$

**Hệ quả 2.2** Giả sử rằng (4) xác định một toán tử giải thức $\{S_\alpha(t)\}_{t\ge0}$ và

1. $S_\alpha(t)$ thỏa mãn

$$\sup_{t\geq 0}\frac{\| S_\alpha(t)\|}{(1+t)^n}<\infty; \quad (22)$$

2. $\Sigma(\Delta,\alpha)\cap i\mathbb{R}$ là đếm được ;

3. Tại mỗi $i\zeta\in\Sigma(\Delta,\alpha)\cap i\mathbb{R}, x\in X$ và mỗi $0\leq j\leq n+1$,

$$\lim_{\eta\uparrow 0}\eta R_\alpha(\eta^j+i\zeta,\Delta)x=0. \quad (23)$$

Khi đó, với mỗi nghiệm nhẹ $u(\cdot)=S_\alpha(\cdot)x_0\in BUC_n(\mathbb{R}^+,\mathbb{X})$ của Bài toán (4) thỏa mãn

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{(1+t)^n}\| u(t)\|=0. \quad (24)$$

*Chứng minh.* Ta nhận thấy rằng các điều kiện ergodic đều trong Định lý 2.1 đều thỏa mãn. Do (19 ) ta có

$$0\leq \lim_{\eta\uparrow 0}\|\eta R_\alpha(\eta+i\zeta,\mathrm{D})u\|_n=\lim_{\uparrow 0}\|\eta\hat{u}(\eta+i\zeta)\|_n=\lim_{\eta\uparrow 0}\|\eta R_\alpha(\eta+i\zeta,\Delta)S_\alpha(\cdot)x_0\|_n$$

$$\leq \| S_\alpha(\cdot)\|_n\|\lim_{\eta\uparrow 0}\|\eta R_\alpha(\eta+i\zeta,\Delta)x_0\|=0.$$

*Lời cảm ơn: Bài báo này là sản phẩm của Đề tài KHCN cấp Bộ Giáo dục và Đào tạo. Mã số B2019-TTB-01.*

**Tài liệu tham khảo**

[1] W. Arendt, C. J.K. Batty. Almost periodic solutions of first- and second-order Cauchy problems. J. Differential Equations, **137** (1997), no. 2, 363-383.

[2] W. Arendt, C. J.K. Batty. Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups. Trans. Amer. Math. Soc. **306** (1988), 837-852.

[3] W. Arendt, C.J.K Batty, M. Hieber, F. Neubrander, Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. Second edition. Monographs in Mathematics, 96. Birkhauser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

[4] B. Baeumer, M.M. Meerschaert, and E. Nane, Brownian subordinators and fractional Cauchy problems, Trans. Am. Math. Soc, **361** (2009), pp. 3915-3930

[5] A. G. Baskakov, Harmonic and spectral analysis of power bounded operators and bounded semigroups of operators on a Banach space. (Russian) Mat. Zametki **97**(2015), no. 2, 174--190; translation in Math. Notes **97** (2015), no. 1-2, 164-178

[6] A. Batkai, K.J. Engel, J. Pruss, R. Schnaubelt, Polynomial stability of operator semigroups. Math. Nachr. **279** (2006), no. 13-14, 1425-1440.

[7] Nguyen Van Minh and Vu Trong Luong."Asymptotic Behavior of Polynomially Bounded Solutions of Linear Fractional Differential Equations" December 2, 2019, preprint.

[8] J. Pruss, "Evolutionary integral equations and applications". Monographs in Mathematics, **87.** Birkhauser Verlag, Basel, 1993.

***Abtract:*** *In this paper we present a simple spectral theory of polynomially bounded functions on the half line, and then apply it to study the asymptotic behavior of solutions of fractional differential equations of the form* $D^\alpha_C u(t)=\Delta u(t)+f(t)$, *where* $D^\alpha_C u(t)$ *is the derivative of the function u in Caputo's sense,* $\Delta$ *is Laplace operator, f is polynomially bounded. Our main result claims that if u is a mild solution of the Cauchy problem such that it is bounded uniform continuous in* $BUC_n(\mathbb{R}_+,X)$ *then* $u\to 0, t\to\infty$ *in* $BUC_n(\mathbb{R}_+,X)$ *and u satisfies some ergodic conditions with zero means. The obtained result extends known results on strong stability of solutions to fractional equations.*

Ngày nhận bài: 31/5/2020. Ngày nhận đăng: 26/7/2020

Liên lạc: Email-tungnt@utb.edu.vn