

MỘT SỐ VẤN ĐỀ VỀ BIỂU THỨC LIÊN HỢP

Mai Anh Đức¹, Trần Hữu La¹

¹Trường Đại học Tây Bắc - TBU

Tóm tắt: Mục đích của bài báo này là trao đổi một số vấn đề về biểu thức liên hợp như tồn tại hay không một biểu thức liên hợp của biểu thức cho trước và có bao nhiêu biểu thức liên hợp với biểu thức đã cho. Bên cạnh đó chúng tôi cũng giới thiệu một phương pháp tổng quát để tìm biểu thức liên hợp của biểu thức đã cho.

Từ khóa: Biểu thức liên hợp; Phương pháp nhân lượng liên hợp; Hằng đẳng thức; Căn thức; Toán cao cấp.

I. Đặt vấn đề

Trong các phương pháp giải toán trong chương trình môn Toán ở bậc phổ thông, *Phương pháp nhân lượng liên hợp* là một phương pháp giải quen thuộc được áp dụng khá nhiều trong các bài toán như bài toán giải phương trình vô tỉ (các phương trình chứa căn thức), bài toán giải hệ phương trình vô tỉ [4], các bài toán về giới hạn của dãy số và giới hạn của hàm số có chứa căn thức... Phương pháp giải đơn giản và hiệu quả này không những giúp học sinh tiếp cận bài toán theo hướng tự nhiên hơn mà còn giúp học sinh tự tạo được nhiều bài toán mới mẻ một cách dễ dàng, thông qua đó có thể tự rèn luyện thêm các kỹ năng và phát triển các thao tác tư duy cho mình.

Phương pháp nhân lượng liên hợp được học sinh làm quen từ THCS với bài toán biến đổi biểu thức đơn giản chứa căn bậc hai [1], ở đó học sinh thực hiện một phép biến đổi đơn giản và được gọi là *Trục căn thức ở mẫu*. Đồng thời trong [1] sách giáo khoa Toán 9 cũng đưa ra định nghĩa hai biểu thức chứa căn thức liên hợp với nhau bằng cách mô tả thông qua các hằng đẳng thức. Trên cơ sở đó, phương pháp nhân lượng liên hợp được mở rộng với việc biến đổi các biểu thức chứa căn thức với bậc tùy ý. Sử dụng ý tưởng này, trong các bài toán giải phương trình và giải hệ phương trình, các bài toán về giới hạn của dãy số, giới hạn của hàm số có chứa căn thức... chúng ta có thể nhóm hoặc thêm bớt các đại lượng phù hợp vào các biểu thức chứa căn rồi làm xuất hiện các đa thức. Nhờ việc phân tích các đa thức đó thành nhân tử làm xuất hiện ra thừa số chung rồi từ đó sử lý tiếp. Tất nhiên có nhiều yếu tố khác cần

chú ý nhưng với các bài toán thông thường thì ý tưởng tổng quát là đưa biểu thức ra khỏi căn để tạo nhân tử chung. Để đơn giản cách trình bày và diễn giải nên trong toàn bộ bài viết này chúng tôi dùng cụm từ **Biểu thức** thay cho cụm từ **Biểu thức chứa căn thức**.

Một trong những điểm mấu chốt của phương pháp nhân lượng liên hợp là xác định được biểu thức liên hợp của biểu thức đã cho. Những biểu thức liên hợp mà học sinh được trang bị trong quá trình học tập thường cơ bản và đơn giản, chẳng hạn như: liên hợp với biểu thức $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$ là $\sqrt{A} \mp \sqrt{B}$, liên hợp với biểu thức $\sqrt[3]{A} \pm \sqrt[3]{B}$ là biểu thức $\sqrt[3]{A^2} \mp \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{B^2}$ và một vài trường hợp đặc biệt khác. Tuy nhiên có một số vấn đề về phương pháp nhân lượng liên hợp mà hầu hết học sinh, thậm chí cả giáo viên đứng lớp cũng chưa làm sáng tỏ. Cụ thể như:

1) Với mỗi biểu thức cho trước có hay không một biểu thức liên hợp? Nếu có thì có bao nhiêu biểu thức liên hợp của một biểu thức đã cho?

2) Nếu một biểu thức cho trước có biểu thức liên hợp thì có cách tìm tổng quát biểu thức liên hợp đó hay không?

Thông thường học sinh được tiếp nhận phương pháp nhân lượng liên hợp thông qua kinh nghiệm của giáo viên truyền đạt lại, có thể kết hợp với năng khiếu của bản thân mà hình thành kỹ năng cho mình. Nếu không trả lời được rõ ràng các câu hỏi trên thì khi gặp một bài toán lạ học sinh sẽ khó có phương án giải quyết. Đây chính là điều mà rất nhiều học sinh gặp phải. Mục đích của bài báo này là trả lời các câu hỏi trên từ góc nhìn của Toán cao cấp (trong

chương trình Đại học). Dựa trên các kiến thức của Toán cao cấp mà người giáo viên không chỉ nhìn rõ lời giải của các bài toán dạng này mà còn có thể sáng tạo ra các bài toán mới, đây là một trong những kỹ năng không thể thiếu của người giáo viên. Kiến thức của Toán cao cấp giúp cho người giáo viên phân tích tìm lời giải và định hướng tư duy một cách tường minh cho học sinh. Từ đó đưa ra một số định hướng sự phạm phù hợp với mỗi bài toán cụ thể. Hy vọng rằng, với những trao đổi của chúng tôi trong bài báo này sẽ phần nào giúp các em học sinh cũng như giáo viên có thêm kinh nghiệm, tri thức để chinh phục các kiến thức cao hơn.

II. Nội dung

1. Thế nào là biểu thức liên hợp?

Không có một định nghĩa phát biểu chính xác cho khái niệm này trong chương trình toán phổ thông. Ở lớp 9 [1], khi học sinh tiếp cận với phương pháp nhân liên hợp lần đầu tiên thì biểu thức liên hợp của một biểu thức được định nghĩa trực tiếp. Ví dụ như *biểu thức* $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$ được gọi là biểu thức liên hợp của biểu thức $\sqrt{A} \mp \sqrt{B}$ hay biểu thức $\sqrt{A} \pm \sqrt{B}$ và biểu thức $\sqrt{A} \mp \sqrt{B}$ được gọi là hai biểu thức liên hợp của nhau. Kiểu định nghĩa này dựa trên cơ sở các hằng đẳng thức đáng nhớ hoặc các đẳng thức quen thuộc khác và định nghĩa cho một biểu thức cụ thể.

Ta có thể nhận thấy một đặc điểm chung của các định nghĩa này là nếu biểu thức α và biểu thức β liên hợp với nhau thì $\alpha\beta$ là một biểu thức không chứa căn thức. Do đó trong toàn bộ bài báo này, khi nói *biểu thức* α là liên hợp của biểu thức β (hoặc nói α và β là hai biểu thức liên hợp của nhau) được hiểu là $\alpha\beta$ là một biểu thức không chứa căn thức.

Rõ ràng mỗi biểu thức cho trước có vô số biểu thức liên hợp với nó. Thật vậy, nếu α và β là hai biểu thức liên hợp thì $\alpha\beta$ là một biểu thức không chứa căn thức. Từ đó suy ra với mọi số hữu tỉ a ta có $a\alpha\beta$ cũng là biểu thức không chứa căn thức hay biểu thức $a\beta$ là biểu thức liên hợp của biểu thức α .

Trong các mục tiếp theo chúng tôi sẽ lần lượt trả lời các câu hỏi còn lại đã đặt ra ở trên.

2. Có hay không một biểu thức liên hợp với biểu thức đã cho?

Để trả lời cho câu hỏi này, ta xét mệnh đề sau đây trong lý thuyết các mở rộng trường [3].

Mệnh đề 1. Mọi mở rộng đại số $\mathbb{Q}(\alpha)$ đều tồn tại một đa thức thuộc $\mathbb{Q}[x]$ nhận α làm nghiệm.

Mệnh đề 1 khẳng định sự tồn tại của đa thức $f(x)$ với hệ số hữu tỉ nhận α là nghiệm, từ đó sẽ giúp chúng ta trả lời về sự tồn tại của biểu thức liên hợp. Thật vậy, giả sử α là biểu thức đã cho. Gọi $f(x)$ là đa thức với hệ số hữu tỉ nhận α là nghiệm và giả sử $f(x)$ có dạng

$$f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0,$$

với $a_0, a_n \neq 0$. Vì $f(\alpha) = 0$ nên ta có

$$a_n \alpha^n + \dots + a_1 \alpha = -a_0,$$

$$\text{hay } \alpha(a_n \alpha^{n-1} + \dots + a_1) = -a_0.$$

Do đó biểu thức liên hợp của α sẽ là $\beta = a_n \alpha^{n-1} + \dots + a_1$. Bằng cách thay α vào biểu thức của β ta sẽ được biểu thức liên hợp với α .

Như vậy ta có thể khẳng định rằng: luôn có biểu thức liên hợp của biểu thức cho trước và có phương pháp tổng quát để tìm ra biểu thức liên hợp.

Phương pháp tổng quát tìm biểu thức liên hợp của biểu thức cho trước (mang tính thuật giải) như sau:

Bước 1. Đặt α là biểu thức đã cho, bằng cách biến đổi, nâng lên lũy thừa một cách thích hợp để khử căn ta tìm được một đa thức $f(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$ với hệ số hữu tỉ nhận α là nghiệm. Lưu ý khi nâng lên lũy thừa, thông thường ta nâng lên lũy thừa theo bậc cao nhất của căn thức có trong biểu thức và cứ như vậy đến khi có được đa thức $f(x)$ nhận α là nghiệm.

Bước 2. Đặt $\beta = a_n \alpha^{n-1} + \dots + a_1$. Thay biểu thức α vào β và biến đổi biểu thức, ta thu được biểu thức rút gọn của β , đó chính là biểu thức liên hợp cần tìm của α .

Sau đây là hai ví dụ minh họa cho phương pháp tìm biểu thức liên hợp mà chúng tôi đã nêu ra.

Ví dụ 1. Tìm biểu thức liên hợp với biểu thức $\sqrt{2}-1$.

Hiển nhiên chúng ta dễ dàng nhận ra biểu thức liên hợp của biểu thức đã cho là $\sqrt{2}+1$ thông qua hằng đẳng thức $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$. Ở đây chúng ta sẽ tìm biểu thức liên hợp của biểu thức $\sqrt{2}-1$ theo phương pháp đã trình bày ở trên.

Bước 1. Đặt $\alpha=\sqrt{2}-1$. Ta có

$$\alpha+1=\sqrt{2} \Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha+1=2$$

$$\Leftrightarrow \alpha(\alpha+2)=1.$$

Bước 2. Đặt $\beta=\alpha+2$. Khi đó $\beta=\alpha+2=\sqrt{2}-1+2=\sqrt{2}+1$. Vậy biểu thức liên hợp của biểu thức $\sqrt{2}-1$ là biểu thức $\sqrt{2}+1$.

Ví dụ 2. Tìm biểu thức liên hợp với biểu thức $1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$.

Đối với bài toán này học sinh sẽ thực sự thấy khó khăn để tìm ra biểu thức liên hợp. Ở đây học sinh phổ thông có thể dùng các hằng đẳng thức để tìm ra biểu thức liên hợp. Cụ thể ta có

$$\begin{aligned} (1+\sqrt[3]{3}+\sqrt{2})((1+\sqrt[3]{3})-\sqrt{2})= \\ =-1+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9} \end{aligned}$$

Tiếp theo là khử căn bậc ba ta sẽ thu được kết quả, tuy nhiên việc khử căn bậc ba trong trường hợp này là rất khó khăn. Lời giải bài toán dạng này sẽ được chúng tôi trình bày trong mục tiếp theo.

Sau đây chúng tôi sẽ trình bày lời giải theo phương pháp tổng quát đã nêu.

Bước 1. Đặt $\alpha=1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$. Khi đó ta có $\alpha-1-\sqrt{2}=\sqrt[3]{3}$. Bằng cách nâng lên lũy thừa bậc 3 cả hai vế, thực hiện các biến đổi rút gọn biểu thức ta thu được

$$\alpha^3-3\alpha^2+9\alpha-10=(3\alpha^2-6\alpha+5)\sqrt{2}.$$

Tiếp theo ta nâng lên lũy thừa bậc 2 cả hai vế của biểu thức trên ta thu được

$$\alpha^6-6\alpha^5+9\alpha^4-2\alpha^3+9\alpha^2-60\alpha+50=0.$$

Bước 2. Đặt

$$\beta=\alpha^5-6\alpha^4+9\alpha^3-2\alpha^2+9\alpha-60.$$

Thay $\alpha=1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ vào biểu thức β ta được biểu thức liên hợp của α là

$$\beta=-10-5\sqrt{2}+5\sqrt{2}\sqrt[3]{3}-10\sqrt[3]{9}+5\sqrt{2}\sqrt[3]{9}.$$

Qua hai ví dụ trên, chúng ta thấy được quy trình thuật giải rất rõ ràng về việc tìm biểu thức liên hợp của biểu thức cho trước. Tuy nhiên có một số vấn đề tồn tại trong phương pháp này mà chúng tôi muốn trình bày rõ hơn trong mục sau.

3. Một số kĩ thuật cụ thể tìm biểu thức liên hợp trong trường hợp đặc biệt.

Chúng ta quay lại Ví dụ 2, ta thấy rằng để tìm ra biểu thức liên hợp của biểu thức $1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ chúng ta phải tính toán rất dài, dễ gây ra nhầm lẫn. Thuật toán trong mục 2 cho chúng ta thấy được sự tồn tại của biểu thức liên hợp, cách tìm nó và thuật toán khá hiệu quả khi tìm biểu thức liên hợp của một số biểu thức đơn giản. Tuy nhiên, nếu biểu thức cho trước phức tạp với bậc căn thức cao thì thuật toán này sẽ tốn nhiều thời gian (mặc dù luôn có kết quả). Do đó khi tìm biểu thức liên hợp của các biểu thức phức tạp, ta chỉ nên dùng nó khi không có cách nào tốt hơn. Vậy có cách nào để tìm ra biểu thức liên hợp của biểu thức đã cho ngắn gọn hơn không?. Câu trả lời cho câu hỏi này sẽ được chúng tôi trình bày trong mục này dựa trên góc nhìn của Toán cao cấp. Ta nhắc lại hai mệnh đề sau của Toán cao cấp [3], [5].

Mệnh đề 2. Mọi mở rộng đại số $\mathbb{Q}(\alpha)$ đều là $\mathbb{Q}$ -không gian vector.

Mệnh đề 3. Mỗi vector thuộc $\mathbb{Q}$ -không gian vector $\mathbb{Q}(\alpha)$ luôn có duy nhất một biểu diễn tuyến tính qua một cơ sở bất kì $\mathbb{Q}(\alpha)$.

Chúng tôi dùng hai mệnh đề này cùng một số kiến thức khác của Toán cao cấp làm cơ sở để định hướng các kĩ thuật tìm biểu thức liên hợp của biểu thức đã cho, xem thêm [2]. Sau đây là một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 3. Tìm biểu thức liên hợp của biểu thức $1+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}$.

Như chúng ta đã biết, các biểu thức liên hợp thường được suy ra từ 7 hằng đẳng thức đáng nhớ hoặc một số đẳng thức quen thuộc. Với biểu thức đã cho ta viết dưới dạng $A+B+C$ trong đó

$$A=1, B=2\sqrt[3]{2}, C=3\sqrt[3]{4}.$$

Khi đó ta liên tưởng đến đẳng thức:

$$\begin{aligned}
& A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = \\
& = (A + B + C) \times \quad (*) \\
& \times (A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA)
\end{aligned}$$

Khi thay $A=1, B=2\sqrt[3]{2}, C=3\sqrt[3]{4}$ vào đẳng thức (*) thì vế trái không còn chứa căn, từ đó suy ra biểu thức liên hợp của biểu thức $A+B+C$ sẽ là:

$$A^2 + B^2 + C^2 - AB - BC - CA \quad (**).$$

Thay $A=1, B=2\sqrt[3]{2}, C=3\sqrt[3]{4}$ vào biểu thức (**) ta được biểu thức liên hợp của biểu thức $1+2\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{4}$ là biểu thức $-11+16\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}$.

Nhận xét 1: Sử dụng hằng đẳng thức (*) có thể tìm được biểu thức liên hợp của biểu thức dạng $(A+B\sqrt[m]{m}+C\sqrt[m]{m^2})$ với A, B, C, m hữu tỷ. Từ nhận xét này ta cũng dễ dàng tìm được biểu thức liên hợp của biểu thức $-1+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}$ (nói trong Ví dụ 2) như trường hợp đặc biệt.

Ví dụ 4. Tìm biểu thức liên hợp của biểu thức $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$.

Theo lí thuyết Mở rộng trường [3], $\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}$ là một phần tử của mở rộng trường $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3})$ trên $\mathbb{Q}$ và do đó phần tử $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}}$ thuộc trường $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3})$. Mặt khác trường $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3})$ là một $\mathbb{Q}$ -không gian vector với cơ sở là

$$\{1, \sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4}\}$$

nên mọi vector của nó đều có dạng

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3} + d\sqrt[3]{4} + e\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + f\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4}$$

với a, b, c, d, e, f là các số hữu tỉ. Điều này có nghĩa là luôn tồn tại các số hữu tỉ a, b, c, d, e, f để

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3}} &= a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3} + \\
&+ d\sqrt[3]{4} + e\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + f\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4} \\
\text{hay } (\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3} + d\sqrt[3]{4} + \\
&+ e\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + f\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4}) = 1
\end{aligned}$$

Thực hiện rút gọn biểu thức ở vế trái, ta được

$$\begin{aligned}
& (a+3e)\sqrt[3]{2} + (b+c)\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3} + (c+3f)\sqrt[3]{4} + \\
& + (2d+3b) + (e+d)\sqrt[3]{4}\sqrt[3]{3} + (2f+a)\sqrt[3]{3} = 1.
\end{aligned}$$

Đồng nhất hai vế của biểu thức ta được hệ

$$\begin{cases}
a+3e=0 \\
b+c=0 \\
c+3f=0 \\
2d+3b=1 \\
e+d=0 \\
2f+a=0
\end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được $a=-\frac{6}{23}, b=\frac{9}{23},$

$$c=-\frac{9}{23}, d=-\frac{2}{23}, e=\frac{2}{23}, f=\frac{3}{23}.$$

Vậy biểu thức liên hợp của biểu thức $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ là biểu thức (sau khi đã nhân hệ thức với 23)

$$-6+9\sqrt[3]{3}-9\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4}.$$

Nhận xét 2: Trong ví dụ trên, ta thấy rằng biểu thức đã cho có $\sqrt[3]{3}$ và trong biểu thức liên hợp cũng xuất hiện $\sqrt[3]{3}$; biểu thức đã cho có $\sqrt[3]{2}$ và biểu thức liên hợp sẽ xuất hiện $\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt[3]{4}$. Ngoài ra, biểu thức liên hợp còn xuất hiện các phần tử $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2}$ và $\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4}$. Như vậy, từ góc nhìn của Toán cao cấp ta có thể dự đoán biểu thức liên hợp của biểu thức đã cho như sau: Nếu trong biểu thức đã cho có một căn thức $\sqrt[m]{m}$ thì trong biểu thức liên hợp phải có các biểu thức $(\sqrt[m]{m})^0, \sqrt[m]{m}, (\sqrt[m]{m})^2, \dots, (\sqrt[m]{m})^{n-1}$. Nếu trong biểu thức đã cho có hai căn thức dạng $\sqrt[m]{m}$ và $\sqrt[q]{q}$ thì ngoài các căn thức dạng $(\sqrt[m]{m})^0, \sqrt[m]{m}, (\sqrt[m]{m})^2, \dots, (\sqrt[m]{m})^{n-1}$ và $(\sqrt[q]{q})^0, \sqrt[q]{q}, (\sqrt[q]{q})^2, \dots, (\sqrt[q]{q})^{p-1}$ còn có thêm các đơn thức là tích của hai căn thức trong hai tập hợp nói trên. Bằng kĩ thuật này và dựa vào đặc điểm của biểu thức đã cho ta có thể dự đoán được biểu thức liên hợp và từ đó tìm được biểu thức liên hợp của biểu thức đã cho.

Quay trở lại ví dụ trên, ta dự đoán được biểu thức

$$a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3} + d\sqrt[3]{4} + e\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + f\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4}$$

là biểu thức liên hợp của biểu thức $\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}$ nên ta có

$$\begin{aligned}
& (\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{3})(a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{3} + \\
& + d\sqrt[3]{4} + e\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{2} + f\sqrt[3]{3}\sqrt[3]{4})
\end{aligned}$$

không chứa căn thức. Thực hiện rút gọn biểu thức, ta được

$$(a+3e)\sqrt[3]{2}+(b+c)\sqrt[3]{2}\sqrt{3}+(c+3f)\sqrt[3]{4}+ \\ +(2d+3b)+(e+d)\sqrt[3]{4}\sqrt{3}+(2f+a)\sqrt{3}.$$

Do biểu thức này không chứa căn nên ta sẽ chọn các số hữu tỉ a, b, c, d, e, f sao cho các hệ số của các đơn thức chứa căn bằng không hay

$$\begin{cases} a+3e=0 \\ b+c=0 \\ c+3f=0 \\ e+d=0 \\ 2f+a=0 \end{cases}$$

Đây là một hệ phương trình vô định, năm phương trình sáu ẩn, tuy nhiên ta chỉ cần một nghiệm của hệ là đủ cho bài toán đang xét. Từ đó ta được ít nhất một bộ số $a=-6, b=9, c=-9, d=-2, e=2, f=3$. Hay biểu thức liên hợp của biểu thức $\sqrt{3}+\sqrt[3]{2}$ là biểu thức

$$-6+9\sqrt{3}-9\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}+2\sqrt{3}\sqrt[3]{2}+3\sqrt{3}\sqrt[3]{4}.$$

Cách giải này cũng chỉ cho chúng ta thấy có vô số biểu thức liên hợp của một biểu thức đã cho.

Nhận xét 3: Cách giải trên khá ngắn gọn và độc đáo, tuy nhiên nếu chỉ đọc lời giải thì sẽ không hiểu được là biểu thức dạng $a+b\sqrt{3}+c\sqrt[3]{2}+d\sqrt[3]{4}+e\sqrt{3}\sqrt[3]{2}+f\sqrt{3}\sqrt[3]{4}$ từ đâu mà có. Đây chính là khó khăn thường gặp đối với học sinh. Vì vậy, người giáo viên cần hiểu sâu sắc vấn đề để bằng những câu hỏi gợi mở hợp lý giúp học sinh có thể tự mình tìm ra biểu thức đó.

III. Kết luận

Với những trao đổi đã được nêu ra và các ví dụ được phân tích cùng những nhận xét tỷ mỉ, lối trình bày định hướng tư duy cho mỗi lời giải cũng khá rõ ràng, chúng tôi hy vọng rằng bài viết sẽ là một hành trang bổ ích cho các học sinh, sinh viên học ngành Đại học sư phạm Toán học trong việc chinh phục những bài toán

khó về phương trình và hệ phương trình, các bài toán về giới hạn của dãy số, giới hạn của hàm số có chứa căn thức.

Cảm ơn: bài báo được hoàn thành từ những trao đổi chuyên môn tại Bộ môn Toán, Khoa Khoa học Tự nhiên - Công nghệ, Trường Đại học Tây Bắc. Nhóm tác giả xin được cảm ơn ý kiến trao đổi của các đồng nghiệp, đặc biệt cảm ơn ThS. Nguyễn Đình Yên đã có những trao đổi sâu sắc với chúng tôi về vấn đề này.

Bài báo là một phần kết quả nghiên cứu của đề tài “Phân loại và phương pháp giải các dạng toán về Không gian vectơ - Ánh xạ tuyến tính - Tổ hợp trong các kì thi Olympic toán học sinh viên toàn quốc.” Mã số: TB2020 - 23.

IV. Tài liệu tham khảo

- [1] Bộ Giáo dục và Đào tạo (2004), *Sách giáo khoa lớp 9 tập 1*, NXB Giáo dục Việt Nam.
- [2] Mai Anh Đức, Nguyễn Đình Yên (2016), *Rèn luyện năng lực sáng tạo cho học sinh phổ thông thông qua phân tích tìm lời giải bài toán*, thông tin website Trường Đại học Tây Bắc tại địa chỉ <http://utb.edu.vn/tintucsukien/news/1867-ren-luyen-nang-luc-sang-tao-cho-hs-pt-tqpttlgbt>.
- [3] Mai Anh Đức, Nguyễn Đình Yên (2020), *Mở rộng trường và Lí thuyết Galois*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.
- [4] Lê Phúc Lữ (2014), *Phương pháp nhân liên hợp giải các bài toán về phương trình vô tỷ*, <https://www.slideshare.net/tuituhoc/ky-thuat-nhan-lien-hop-le-phuc-lu00001>.
- [5] Ngô Việt Trung (2002), *Giáo trình Đại số tuyến tính*, NXB Đại học Quốc Gia Hà Nội.

ON SOME PROBLEMS ABOUT THE CONJUGATE EXPRESSIONS

Mai Anh Duc¹, Tran Huu La¹

¹Tay Bac University - TBU

Summary: *The purpose of this paper is to discuss some problems about conjugate expressions such as there exists or not a conjugate of a given expression or how many conjugate expressions with a given expression there are. We also will propose the general method to find the conjugate expression of a given expression.*

Keywords: *Conjugate expression; Method for multiplying conjugate expression; Algebraic identities; Radicals; Advanced mathematics.*

Ngày nhận bài: 20/3/2020. Ngày nhận đăng: 15/10/2020

Liên lạc: e-mail: maianhduc@utb.edu.vn